ДЖ. МИЛНОР

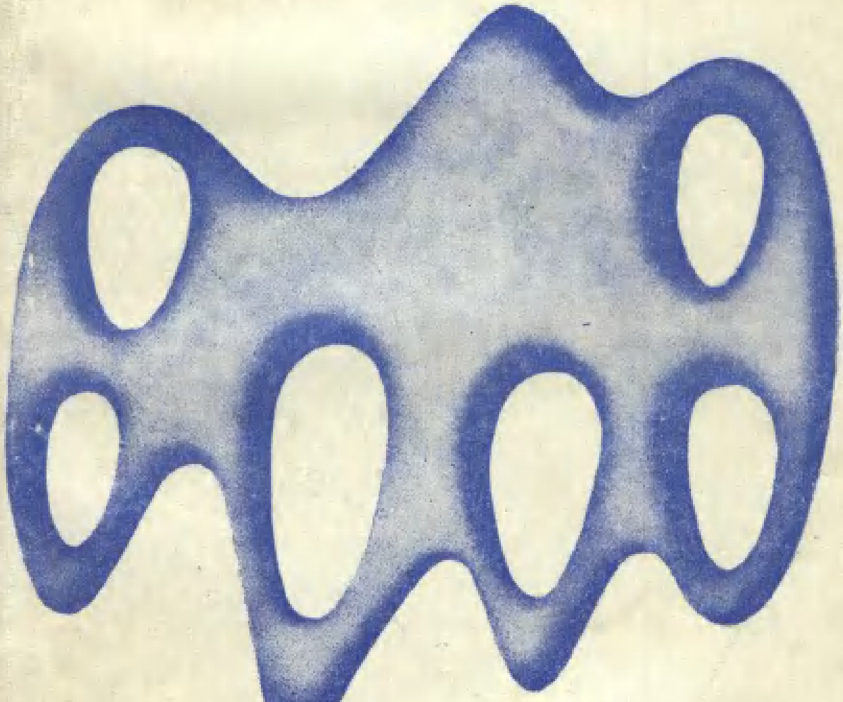
А. УОЛЛЕС

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС



ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

TOPOLOGY FROM THE DIFFERENTIABLE VIEWPOINT

by

JOHN W. MILNOR
Princeton University

Based on notes

by

DAVID W. WEAVER

The University Press of Virginia
Charlottesville

1965

DIFFERENTIAL TOPOLOGY

First Steps

by

ANDREW H. WALLACE
University of Pennsylvania

W. A. Bfnjamin
New York · Amsterdam

1968

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

Популярная серия

Дж. МИЛНОР | А. УОЛЛЕС

Дифференциальная топология

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС

Перевод с английского
А. А. Блохина

Перевод с английского
С. Ю. Аракелова

Под редакцией
Д. В. Аносова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1972

УДК 513.83

Книга составлена из двух небольших и хорошо дополняющих одно другое сочинений известных американских ученых. Она может служить для первоначального ознакомления с новой математической дисциплиной, интерес к которой за последние годы очень возрос. Идеи дифференциальной топологии оказались чрезвычайно плодотворными в геометрии, в анализе, в теории дифференциальных уравнений, а также в различных приложениях математики. Авторы излагают начальные понятия этой дисциплины, иллюстрируя их большим количеством примеров.

Книгу следует рекомендовать всем, начинающим изучать современную математику. Она доступна для студентов младших курсов университетов и педагогических институтов, но будет также интересна как специалистам, так и всем, кто желает получить представление о математике наших дней.

Редакция литературы по математическим наукам

инд. 2-2-3
38-72

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга, предлагаемая вниманию читателя, является переводом двух отдельных книг: Дж. Милнора «Топология с дифференциальной точки зрения» и А. Уоллеса «Дифференциальная топология. Первые шаги» (название, которое вполне подошло бы и к книжке Милнора). Они почти не перекрываются и весьма удачно дополняют друг друга. Вместе взятые, они дают введение в основные понятия дифференциальной топологии, весьма наглядное и доступное широкому кругу читателей, начиная со студентов младших курсов. Авторы излагают некоторые из основных геометрических методов дифференциальной топологии. Алгебраические средства остаются в стороне, но читатель подводится к пониманию того, как возникает необходимость в использовании этих средств. Он сможет понять, в чем состоят некоторые из недавних достижений дифференциальной топологии, но еще не будет в состоянии усвоить полные доказательства. Знакомство с некоторыми из более простых и более старых вещей будет включать и доказательства.

Книга Уоллеса входит в серию «Математических монографий», издаваемую под редакцией Р. Ганнинга и Х. Росси, которая специально предназначена для студентов младших курсов[1]). Ее вполне можно отнести к научно-популярной литературе (если, конечно, не считать, что под это название подпадают только брошюры типа «Отчего бывает день и ночь»).

Местами, особенно к концу, Уоллес не доказывает, а рассказывает — для научно-популярной литературы это вполне естественно (часто даже неизбежно), нужно лишь четко различать, что доказано, а что нет.

В книге Милнора по сравнению с первой изложение является заметно более сжатым, что в известной

---

[1]) Ранее у нас была переведена еще одна из книг этой серии: М. Спивак, Анализ на многообразиях, изд-во «Мир», 1968.

мере связано с ее происхождением. Она основана на записях курса лекций, к тому же весьма небольшого курса, в который Милнор тем не менее сумел включить достаточно содержательный материал. Однако никакого предварительного знакомства читателя с предметом Милнор также не предполагает. Проработав книгу Милнора, читатель сможет заделать почти все дыры в первых семи параграфах книги Уоллеса.

В соответствии с элементарным характером изложения материал первых четырех параграфов у Уоллеса и первых трех параграфов у Милнора еще не относится собственно к дифференциальной топологии: сообщаемые здесь начальные сведения о гладких многообразиях нужны везде, где гладкие многообразия встречаются. Ленг удачно назвал подобный материал «ничьей землей, лежащей между обычным курсом анализа, с одной стороны, и тремя великими дифференциальными теориями — дифференциальной топологией, дифференциальной геометрией и дифференциальными уравнениями — с другой». Этот материал Милнор и Уоллес излагают по-разному.

Милнор ограничивается гладкими многообразиями, расположенными в евклидовом пространстве, а у Уоллеса гладкое многообразие определяется как топологическое пространство с определенной дополнительной структурой (и a priori не предполагается куда-либо вложенным). Преимуществом первого подхода является простота и наглядность, а также резкое сокращение расхода времени на обсуждение оснований (последнее, вероятно, и определило выбор Милнора). Зато абстрактный подход является более гибким, ибо он избавляет от необходимости всякий раз, когда вводится то или иное многообразие, обсуждать, как его расположить в евклидовом пространстве и не зависят ли те или иные свойства от особенностей такого расположения. Другое различие состоит в том, что Милнор подробно останавливается на «приведении в общее положение посредством малых шевелений» (круг вопросов, связанный с теоремой Сарда), тогда как Уоллес этого не касается.

Параграфы 4, 5, 6 книги Милнора посвящены степени отображения и ее применениям. С точки зрения «высокой науки» степень отображения является простым приложением теории гомологий, которая сама является всего лишь самой простой частью алгебраической топологии. Однако несомненно, что многим хотелось бы ознакомиться только со степенью отображения, по возможности избегая всего остального. Книга Милнора предоставляет такую возможность[1]).

Во многом книга Милнора близка к первым двум главам и части третьей главы монографии Л. С. Понтрягина ([29] в списке литературы), по которой учились многие советские математики. За 15 лет эта монография, вышедшая небольшим тиражом, стала довольно редкой; к тому же она по своему характеру труднее для начинающего, ибо ее основная цель не была учебной, а состояла в том, чтобы дать изложение результатов Понтрягина о гомотопических группах сфер, полученных с использованием открытой им связи между задачами гомотопической и дифференциальной топологии. Милнор посвятил этой связи § 7. В конце он иллюстрирует ее на простейшем примере (теорема Хопфа) и сообщает, что теперь эти идеи, если можно так выразиться, работают в другую сторону — не от многообразий к гомотопиям, а наоборот. На этом книжка Милнора естественным образом заканчивается — чтобы идти дальше, требуется аппарат алгебраической топологии в изрядном объеме.

[1]) Не зависящее от теории гомологий определение степени отображения дает известные преимущества при преподавании, позволяя строить теорию гомологий сразу для клеточных разбиений.

В чисто логическом отношении более простым следовало бы признать не гладкое, а комбинаторное (но не опирающееся на гомологии) определение степени, ибо таковое можно дать, используя только элементы линейной алгебры и простейшие свойства непрерывных функций. (Непрерывные отображения при этом аппроксимируются не гладкими, а кусочно-линейными.) Однако, хотя формально эти «элементарные» средства и проще, чем анализ, практически последний уже с младших курсов становится не менее привычным; доказательства же при «гладкой» трактовке степени отображения получаются короче и изящнее (что, впрочем, зависит от вкуса).

Основная часть книги Уоллеса посвящена критическим точкам функций и связанным с ними геометрическим операциям (сферическим перестройкам, или перестройкам Морса), которые можно использовать для исследования структуры гладких многообразий. Представление о таком использовании дают приводимые Уоллесом теоремы о двумерных и трехмерных многообразиях. Последний § 8 содержит некоторые указания о том, как эти методы могут применяться в менее элементарной обстановке; подчеркивается, что при этом необходимо сочетать их с методами алгебраической топологии, и до некоторой степени разъясняется, почему необходимо такое сочетание.

При переводе было добавлено несколько литературных ссылок, а во всех случаях, когда та или иная работа имеется на русском языке, ссылка дается на русский перевод или на первоначальную русскую публикацию. Однако там, где авторы, говоря о вещах, входящих в обычные университетские курсы, ссылаются на американские учебники, мне казалось ненужным делать примечание об их русских аналогах. Естественно предполагать, что читатель достаточно хорошо знаком с подобными вещами, а при необходимости освежить свою память сам выберет из многочисленных пособий то, которое ему больше нравится.

Указания о дальнейшем изучении предмета, имеющиеся в конце обеих книг, при переводе были сведены в один (заключительный раздел с рекомендуемой литературой); естественно, что при этом слиянии их пришлось отредактировать и они были расширены.

Ссылки на книги, составляющие настоящее издание, делаются так: см. Милнор, стр. ... . Ссылки на другую литературу указываются номерами, заключенными в квадратные скобки. Номера относятся к общему списку, приведенному в конце.

Большим достоинством обеих книг является наличие в них упражнений. Я позволил себе добавить еще несколько упражнений к книге Милнора; как и добавленные литературные ссылки, они отмечены звездочкой.

Д. В. Аносов

А. УОЛЛЕС

Дифференциальная топология. Первые шаги

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что изучает дифференциальная топология? Если бы этот вопрос задал достаточно продвинувшийся учащийся с хорошей подготовкой по алгебраической топологии, то ему можно было бы дать довольно исчерпывающий ответ. Но этот ответ был бы техническим. Цель настоящей книги — ответить на этот вопрос студенту, находящемуся на гораздо более ранней стадии обучения. Мы попытались сделать это, создавая у читателей интуитивное понимание некоторых сторон предмета, причем мы сводим к минимуму необходимые предварительные знания и избегаем тонкостей и технически трудных мест.

Круг идей, излагаемых в книге, ограничен методом сферических перестроек и изучением критических точек функций на многообразиях. Эти идеи, с одной стороны, допускают простое геометрическое описание, а с другой — являются мощным инструментом для изучения структуры многообразий. Простым примером этого служит проведенная с их помощью в § 7 классификация двумерных многообразий.

Дальнейшее продвижение в изучении многообразий — а это является главной целью дифференциальной топологии — требует добавления к описанным здесь геометрическим методам более мощного алгебраического аппарата. Кое-какие указания о необходимых для этого идеях можно найти в § 8.

Короче говоря, в книге описаны только первые шаги дифференциальной топологии. Как и в любом разделе топологии, они должны быть геометрическими, при изучении дальнейших или технически более сложных шагов необходимо иметь интуитивное геометрическое понимание предмета и исходить из него.

От читателя предполагается знакомство с анализом, включая некоторые свойства дифференциальных уравнений, а также с поведением квадратичных форм при линейной замене переменных. Никакого предварительного знания топологии не требуется. Все нужные сведения из общей топологии изложены в первом параграфе, а студенты, которые уже усвоили понятия открытого и замкнутого множества и непрерывного отображения, могут спокойно начать со второго параграфа.

Параграфы 2 и 3 знакомят читателя с понятиями гладкого многообразия и гладкого отображения. В § 4 изучается один из центральных вопросов дифференциальной топологии — теория критических точек функций на гладком многообразии. Это изучение продолжается в § 5, где исследуются многообразия уровня данной функции. В результате в § 6 мы естественно приходим к определению сферической перестройки. В § 7 развитые в предыдущих главах понятия применяются к задаче о классификации поверхностей. Параграф 8 содержит некоторые указания по поводу дальнейшего изучения предмета.

А. Уоллес

Филадельфия, Пенсильвания

§ 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Окрестности

Общую, или теоретико-множественную топологию, можно охарактеризовать как абстрактное изучение понятий близости и непрерывности. Для этого надо прежде всего отыскать в элементарной геометрии те свойства близости, которые представляются основными, и принять их за аксиомы. Пусть E есть n-мерное евклидово пространство, и пусть p — его точка. Окрестность точки p по идее должна была бы состоять из точек, близких к p, и целиком окружать p.

Уточняя это рассуждение, определим окрестность точки p как произвольное множество U, содержащее открытый шар[1]) с центром в точке p. Согласно этому определению, множество U на рис. 1.1 является окрестностью точки p на плоскости, поскольку оно содержит открытый круг с центром в этой точке. Но для множеств U, изображенных на рис. 1.2 и 1.3, любой круг с центром в точке p будет содержать точки, лежащие вне U, так что в этих случаях U не является окрестностью точки p. Определение окрестности формулируется так, чтобы по возможности освободиться от понятий размера и формы, не играющих никакой роли в топологии.

Используя данное определение окрестности точки в евклидовом пространстве, легко проверить следующие свойства:

---

[1]) Обратите внимание на различие между *шаром* и *сферой*: замкнутый (соответственно открытый) шар радиуса r состоит из тех точек, расстояние которых до центра не превосходит r (соответственно строго меньше r), а сфера — из точек, отстоящих от центра ровно на r. В некоторых разделах математики часто «шар» называют «сферой», но лучше этого избегать, особенно в геометрии, где нужны и шары, и сферы. Забегая вперед, замечу, что позднее под «сферой» часто будет пониматься любое многообразие, диффеоморфное сфере (смысл этого выяснится в § 2).— *Прим. ред.*

1) точка p принадлежит любой своей окрестности.

2) если U — окрестность точки p, а $V \supset U$, то V — тоже окрестность точки p;

3) если U и V — окрестности точки p, то их пересечение $U \cap V$ — тоже окрестность точки p;

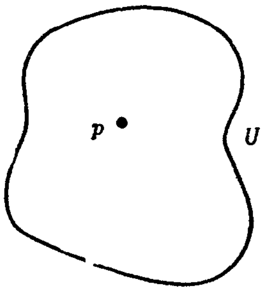


Рис. 1.1.

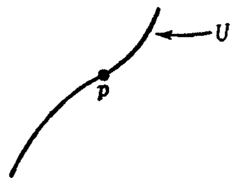


Рис. 1.2.

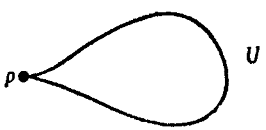


Рис. 1.3.

4) если U — окрестность точки p, то можно найти такую окрестность V точки p, что $V \subset U$ и V является окрестностью каждой из своих точек.

Упражнение 1.1. Докажите свойства 1—4.

Детальный разбор тех свойств окрестностей и непрерывности, которые встречаются, например, в курсе математического анализа, показывает, что все эти свойства можно вывести из четырех выписанных выше. Поэтому при абстрактном подходе разумно принять свойства 1—4 за аксиомы. Это приводит к следующему определению.

Определение 1.1. *Топологическое пространство* — это множество E, каждая точка p которого снабжена набором подмножеств E, называемых *окрестностями точки* p и удовлетворяющих четырем приведенным выше условиям.

Примеры. 1.1. Евклидово пространство с окрестностями, определенными выше, является топологическим пространством.

1.2. Пусть S — сфера (скажем, единичная сфера в трехмерном пространстве с центром в начале координат). Назовем множество U окрестностью точки p в S, если для некоторого ε оно содержит все точки S, удаленные от p на расстояние, меньшее ε. Следует проверить, что все аксиомы для окрестностей выполняются. Таким образом, S является топологическим пространством.

1.3. Случай других поверхностей разбирается так же, как случай сферы. Например, можно превратить в топологическое пространство тор — поверхность, заметаемую окружностью радиуса 1 с центром в точке $(2, 0, 0)$ при вращении плоскости (x, y) вокруг оси y. Кроме того, сферы больших размерностей превращаются в топологические пространства тем же способом, что и двумерная сфера в примере 1.2.

Заметим, что в примерах 1.2 и 1.3 объемлющее евклидово пространство играет лишь вспомогательную роль. В обоих случаях рассматриваемое топологическое пространство является подмножеством, и для определения топологии существенны лишь точки этого подмножества. Любое подмножество евклидова пространства тем же способом можно превратить в топологическое пространство. На самом деле то же самое можно сделать с подмножеством любого топологического пространства. Точнее, пусть E — топологическое пространство, а F — его подмножество. Пусть p — точка множества F. Назовем подмножество U множества F *окрестностью точки* p *в* F, если $U = F \cap V$, где V — окрестность точки p в E. Проверьте в качестве упражнения, что определенные так окрестности в F удовлетворяют аксиомам окрестностей.

Определение 1.2. Множество F, превращенное в топологическое пространство таким способом, называется *подпространством* пространства E.

Пример 1.4. В примерах 1.2 и 1.3 сфера и тор являются подпространствами трехмерного евклидова пространства.

Заметим, что во всех построенных выше примерах топологические пространства появлялись как подпространства евклидова пространства. Тем не менее отнюдь не все топологические пространства обладают этим свойством. Например, пусть E — множество всех ограниченных функций, заданных на единичном интервале I и принимающих действительные значения. Объявим множество U окрестностью функции p в E, если оно содержит все функции q в E, для которых $\sup\limits_{x \in I} |p(x) - q(x)|$ меньше, чем некоторое ε. Легко видеть, что аксиомы окрестностей выполняются. Можно показать (но это не так уж просто), что E не может быть подпространством никакого евклидова пространства. Впрочем, после того как это замечание сделано, о нем можно забыть на время чтения данной книги, поскольку все пространства, с которыми нам придется иметь дело, будут подпространствами евклидовых пространств.

Заметим еще, что под *окрестностью подмножества* A в E понимают любое множество, являющееся окрестностью каждой точки из A.

1.2. Открытые и замкнутые множества

Два вида подмножеств в топологическом пространстве оказываются особенно важными.

Определение 1.3. Пусть E — топологическое пространство, а U — его подмножество. Множество U называется *открытым в* E (или просто *открытым*, когда нет опасности путаницы), если U является окрестностью для любой точки $p \in U$.

Определение 1.4. Пусть E — топологическое пространство, а F — его подмножество. Множество F

называется *замкнутым в* E (или просто *замкнутым*), если множество $E \setminus F$ открыто.

Примеры. 1.5. Пусть E — плоскость, а U — открытый круг в E. Тогда U — открытое множество. Докажите это в качестве упражнения.

1.6. Пусть E — плоскость, а F — замкнутый круг. Тогда F — замкнутое множество.

1.7. Аналогично в евклидовом пространстве любой размерности открытый шар той же размерности является открытым множеством, а замкнутый — замкнутым.

1.8. Множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве, координаты которых при фиксированных a_i и b_i удовлетворяют неравенствам $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, открыто. Множество точек, для которых $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, замкнуто.

Очень существенным является описываемое следующей теоремой поведение открытых и замкнутых множеств относительно операций объединения и пересечения:

Теорема 1.1.

1) *Объединение любой совокупности открытых множеств открыто.*

2) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

3) *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.*

4) *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. 1) Пусть дана совокупность открытых множеств пространства E, члены которой мы обозначим через U_i (i пробегает какое-то множество индексов). Положим $U = \bigcup U_i$ и возьмем точку p в U. Тогда для некоторого i точка p лежит в U_i, так что U_i есть окрестность точки p. Но $U \supset U_i$, откуда U — окрестность точки p (аксиома 2). Поэтому U является окрестностью каждой своей точки и, следовательно, открытым множеством (определение 1.3).

2) Пусть U_1 и U_2 — открытые множества, и пусть $p \in U_1 \cap U_2$. Так как U_1 и U_2 оба открыты и содержат точку p, они являются окрестностями точки p (определение 1.3). Следовательно, $U_1 \cap U_2$ есть окрестность точки p. Таким образом, множество $U_1 \cap U_2$ является окрестностью каждой своей точки и потому открыто (определение 1.3).

Утверждение пунктов 3) и 4) получается из утверждений 1) и 2) взятием дополнений.

Заметим, что доказательство пункта 2) не проходит для пересечения бесконечного числа открытых множеств. Например, если E — действительная прямая, а U_n — интервал $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, то каждое множество U_n открыто, но пересечение всех U_n состоит из одной точки 0 и не является открытым множеством.

Пусть теперь A — любое множество в топологическом пространстве E. По теореме 1 объединение $\operatorname{Int} A$ всех открытых множеств, содержащихся в A, открыто. Ясно, что это «наибольшее» открытое множество, содержащееся в A.

Определение 1.5. $\operatorname{Int} A$ называется *внутренностью множества* A (Int — сокращенное «interior»).

Двойственным образом пересечение $\bar{A}$ всех замкнутых подмножеств, содержащих A, замкнуто и является «наименьшим» замкнутым множеством, содержащим A.

Определение 1.6. $\bar{A}$ называется *замыканием множества* A.

Определение 1.7. $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \cap \overline{CA}$ называется *границей множества* A (Fr — сокращенное «frontier»).

Пример 1.9. Пусть E — плоскость, а A — открытый круг, к которому добавлены точки верхней полуокружности. Тогда $\operatorname{Int} A$ есть открытый круг, $\bar{A}$ — замкнутый круг, а $\operatorname{Fr} A$ — окружность.

Упражнения. 1.2. Пусть A — множество в топологическом пространстве. Докажите, что точка p лежит в $\operatorname{Int} A$ тогда и только тогда, когда она имеет окрестность, целиком содержащуюся в A. Докажите также, что p лежит в $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки p пересекает A.

1.3. Покажите, что для любых двух множеств A и B в топологическом пространстве $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ и $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

1.4. Пусть E — топологическое пространство, а F — подпространство. Покажите, что множество U, лежащее в F, открыто в F тогда и только тогда, когда $U = V \cap F$, где V — открытое множество в E.

1.3. Непрерывные отображения

Пусть E и F — топологические пространства, и пусть f — отображение пространства E в F. Последнее обозначают так:

$$f: E \to F.$$

Идея непрерывности состоит просто в том, что точки, близкие друг к другу в E, отображаются в точки, близкие друг к другу в F. Это уточняется следующим образом:

Определение 1.8. Отображение f: $E \to F$ *непрерывно в точке* p, если для любой окрестности V точки $f(p)$ в F существует такая окрестность U точки p в E, что $f(U) \subset V$. Отображение f *непрерывно*, если оно непрерывно в каждой точке пространства E.

Упражнения. 1.5. Пусть в определении 1.8 как E, так и F является действительной прямой. В этом случае обычное определение непрерывности функции f в точке x состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x' - x| < \delta$, то $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Докажите, что это эквивалентно определению 1.8.

1.6. Пусть дано отображение $f: E \to F$. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в F множества открыт в E. Используйте это для доказательства того, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

1.7. Пусть E является объединением двух замкнутых множеств A и B, и пусть дано отображение $f: E \to F$. Предположим, что ограничения отображения f на множества A и B являются непрерывными отображениями этих множеств в F. Покажите, что f также непрерывно. Постройте пример, показывающий, что если множества A и B не замкнуты, то отображение f не обязано быть непрерывным.

Особое значение имеют те непрерывные отображения, у которых существуют непрерывные обратные отображения.

Определение 1.9. Пусть f — взаимно однозначное отображение пространства E в F. Таким образом, существует обратное отображение g пространства F в E. Если и f, и обратное к нему отображение непрерывны, то f называется *гомеоморфизмом*, и тогда говорят, что пространства E и F *гомеоморфны*.

С точки зрения общей топологии гомеоморфные пространства не отличаются друг от друга. Таким образом, можно сказать, что нас интересуют те свойства, которые, будучи верными для одного пространства, верны и для всех гомеоморфных ему пространств. Сформулируем это иначе. Заметим, что гомеоморфизм между E и F устанавливает взаимно однозначное соответствие между окрестностями в E и окрестностями в F, а также между открытыми множествами в E и открытыми множествами в F. Следовательно, любое свойство, формулируемое только с помощью окрестностей и открытых множеств, является топологическим свойством. Вскоре у нас появятся примеры таких свойств.

1.4. Топологические произведения

В этом разделе описывается метод, который часто используется для получения новых пространств из уже имеющихся.

Пусть E и F — топологические пространства. Множество $E \times F$ определяется как множество пар (p, q), где $p \in E$, а $q \in F$. Оно превращается в топологическое пространство следующим образом: если $(p, q) \in E \times F$, то окрестность точки (p, q) — это любое множество, содержащее множество вида $U \times V$, где U — окрестность точки p в E, а V — окрестность q в F. Нетрудно видеть, что аксиомы 1—4 для таких окрестностей выполняются.

Определение 1.10. Множество $E \times F$, превращенное в топологическое пространство только что описанным способом, называется *топологическим произведением пространств E и F*.

Примеры. 1.10. Если $E = F =$ действительная прямая, то $E \times F$ — плоскость с обычной топологией двумерного евклидова пространства.

1.11. Если E — двумерное евклидово пространство, а F — действительная прямая, то $E \times F$ — трехмерное евклидово пространство. Этот факт обобщается очевидным образом: топологическое произведение евклидовых пространств размерностей m и n есть евклидово пространство размерности $m + n$.

1.12. Если E — интервал на действительной прямой, а F — окружность, то $E \times F$ — цилиндр.

1.13. Позже мы увидим со всеми подробностями, что тор является топологическим произведением окружности на себя.

1.5. Связность

В этом и следующем разделе мы опишем два важных топологических свойства. Первое из них, связность, есть, так сказать, свойство состоять из одного куска.

Определение 1.11. Пространство E *связно*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств, открытых в E. Множество в топологическом пространстве *связно*, если оно связно как подпространство.

Примеры. 1.14. Пусть E — пространство, которое состоит из двух точек — a и b и в котором окрестностями точки a являются множества $\{a\}$ и $\{a, b\}$, а окрестности точки b — это $\{b\}$ и $\{a, b\}$. Легко видеть, что аксиомы окрестностей выполняются. Кроме того, множества $\{a\}$ и $\{b\}$ открыты; таким образом, E является объединением двух открытых непересекающихся множеств. Следовательно, пространство E не связно.

1.15. Пусть A — объединение двух открытых непересекающихся кругов на плоскости. Тогда A не связно.

Намного труднее дать пример связного пространства [1]) (за исключением некоторых тривиальных случаев, вроде пространства, состоящего из одной точки). Один из наиболее важных примеров — это интервал на прямой. Интуитивно совершенно ясно, что он состоит из одного куска и должен быть связным, но это, конечно, нужно доказать.

Теорема 1.2. *Пусть A — открытый интервал на прямой, скажем, множество таких действительных чисел x, что $0 < x < 1$. Тогда A связно.*

Доказательство. Предположим, что A не связно. Тогда по определению $A = B \cup C$, где B и C — некоторые непустые непересекающиеся множества, открытые в A и, следовательно, на прямой. Поскольку B и C непусты, найдется точка $b \in B$ и точка $c \in C$. Предположим для определенности, что $b < c$. Теперь определим D как множество тех точек x в B, для которых $x < c$. Множество D непусто, поскольку оно содержит точку b. Пусть d — наименьшая верхняя грань чисел из D. Покажем, что d не может лежать ни в B, ни в C. Поскольку тем не менее d заключено между b и c, оно заведомо лежит в A, а значит, либо в B, либо в C. Это противоречие покажет, что A на самом деле связно.

Итак, предположим, что $d \in B$. Так как все x из D удовлетворяют неравенству $x < c$, то $d \leqslant c$, а раз d лежит в B, то в действительности $d < c$. Множество B открыто, и поэтому существует открытый интервал U, содержащий d и лежащий в B. Если взять длину U меньше, чем $c - d$, то U будет содержаться в D. Но тогда и правый конец U лежал бы в D и был бы больше, чем d, что невозможно, ибо d — верхняя грань чисел из D. Поэтому d не может лежать в B.

[1]) Точнее связность приходится доказывать — нельзя же перебрать в уме одно за другим все возможные представления E в виде объединения двух открытых подмножеств и убедиться, что эти два подмножества всегда пересекаются. — *Прим. ред.*

Предположим теперь, что $d \in C$. Тогда, поскольку C открыто, найдется интервал U, содержащий точку d и лежащий в C. Но это означает, что для некоторого $\varepsilon < 0$ не существует точек множества B (а стало быть, и D), заключенных между $d-\varepsilon$ и d. Это противоречит тому факту, что d есть точная верхняя грань чисел из D. Следовательно, $d \notin C$.

Таким образом, d не лежит ни в B, ни в C, что и приводит к требуемому противоречию, как это уже объяснялось выше. Доказательство окончено.

Ясно, что тем же способом с небольшими изменениями можно доказать связность интервалов, содержащих один или оба конца, а также интервалов, бесконечных в одном или обоих направлениях.

Теорема 1.2 допускает обращение, которое довольно тривиально.

Теорема 1.3. *Если множество действительных чисел A связно, то A есть интервал (конечный или бесконечный, с включенными или не включенными концами).*

Доказательство. Пусть a и b — две точки из A, причем $a < b$. Надо показать, что A содержит все числа c, лежащие между a и b. Предположим, что существует число c, заключенное между a и b, но не принадлежащее A. Пусть B — множество всех чисел из A, меньших c, а C — множество всех чисел из A, больших c. Тогда $A = B \cup C$, причем B и C оба открыты в A, не пересекаются и непусты. Это противоречит предположению о связности A, и поэтому такого числа c не существует. Следовательно, A — интервал.

Теперь уже довольно легко строить другие примеры связных пространств. Следующая теорема дает общий метод получения новых связных пространств из уже имеющихся.

Теорема 1.4. *Пусть f: $E \to F$ — непрерывное отображение связного пространства E на пространство F. Тогда F связно.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Тогда $F = A \cup B$, где A и B непусты, не пересекаются и открыты. Но при этом $E = f^{-1}(A) \cup \cup f^{-1}(B)$, причем $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ непусты, не пересекаются и, согласно упражнению 1.6, открыты. Это противоречит связности E, так что F обязано быть связным.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если пространство E связно, а F гомеоморфно E, то F связно, так что связность является топологическим свойством. Вот другой пример использования теоремы 1.4. Существует непрерывное отображение единичного отрезка действительных чисел $0 \leqslant x \leqslant 1$ на окружность, а именно отображение, переводящее точку x в точку $(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ на плоскости. Поэтому окружность связна.

Теорема 1.5. *Если E и F — связные пространства, то произведение $E \times F$ также связно.*

Доказательство. Как обычно, проводим доказательство от противного. Предположим, что $E \times F$ не связно. Тогда $E \times F = A \cup B$, где множества A и B открыты, не пересекаются и непусты. Возьмем точку (x, y) в A. Множество $E \times \{y\}$ гомеоморфно пространству E и потому связно. Отсюда следует, что $E \times \{y\}$ содержится в A. В противном случае его пересечения с A и B давали бы разложение на открытые и не пересекающиеся непустые множества. Но теперь аналогичное рассуждение показывает, что для любого x' из E слой $\{x'\} \times F$ должен содержаться в A. Выходит, что всё $E \times F$ содержится в A, значит, B должно быть пусто. Это и дает требуемое противоречие, поскольку B предполагалось непустым. Поэтому $E \times F$ связно.

Пример 1.16. Мы уже видели, что открытый интервал I на прямой связен. Отсюда следует, что квадрат $I^2 = I \times I$ связен. По индукции заключаем, что n-мерный куб I^n связен. Аналогично, поскольку действительная прямая связна, n-мерное евклидово пространство также связно.

Упражнения. 1.8. Пусть A — связное множество в топологическом пространстве E. Пусть множество B таково, что $A \subset B \subset \bar{A}$. Докажите, что тогда B связно.

1.9. Пусть A и B — связные множества в пространстве E, и пусть $A \cap \bar{B}$ непусто. Докажите, что $A \cup B$ связно.

Примеры. 1.17. Пример 1.16 показывает, что открытый круг (гомеоморфный квадрату I^2) связен. Теперь из упражнения 1.8 следует, что связным будет и множество, полученное добавлением к кругу всех или только некоторых точек на окружности. Аналогичный пример можно построить для бо́льших размерностей.

1.18. Обыкновенную сферу можно представить в виде объединения двух замкнутых кругов с непустым пересечением. Поэтому, согласно упражнению 1.9, эта поверхность связна. Аналогично n-мерная сфера будет связной при любом $n \geqslant 1$.

1.6. Компактность

Понятие компактности обобщает свойство быть замкнутым и ограниченным множеством в евклидовом пространстве. Сначала мы наложим на рассматриваемые пространства аксиому отделимости Хаусдорфа. В общей топологии ее выполнение предполагается не всегда, однако нас эта аксиома устраивает, поскольку для всех пространств, которыми мы интересуемся, она так или иначе выполняется.

Определение 1.12. Будем называть топологическое пространство *хаусдорфовым*, если оно обладает следующим свойством: каковы бы ни были две различные точки p и q, существует такая окрестность U точки p и такая окрестность V точки q, что $U \cap V = \varnothing$.

Примеры. 1.19. Любое евклидово пространство является хаусдорфовым.

1.20. Любое подпространство евклидова пространства хаусдорфово. На самом деле любое подпространство любого хаусдорфова пространства хаусдорфово.

Прежде чем определять компактность, нужно дать несколько предварительных определений.

Определение 1.13. *Покрытие* топологического пространства E — это набор множеств из E, объединение которых дает все пространство E. Оно называется *открытым покрытием*, если каждое множество в наборе открыто.

Определение 1.14. Пусть дано покрытие топологического пространства. *Подпокрытие* — это покрытие, все множества которого принадлежат данному покрытию.

Определение 1.15. *Компактное пространство* (или *компакт*) — это хаусдорфово пространство, обладающее тем свойством, что каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т. е. подпокрытие, состоящее из конечного числа множеств. Множество в топологическом пространстве называется *компактным*, если оно является компактным подпространством.

Примеры. 1.21. Теорема Бореля — Лебега из анализа показывает, что замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве является компактным (см. [16]).

1.22. Действительная прямая не компактна. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим набор открытых интервалов вида $(n - 1, n + 1)$ с целыми n. Это открытое покрытие действительной прямой, однако никакой конечный набор этих интервалов, очевидно, не может покрыть всей прямой. Аналогичное рассуждение показывает, что n-мерное евклидово пространство не компактно и что на самом деле не компактно любое неограниченное подмножество евклидова пространства.

Упражнения. 1.10. Покажите, что n-мерная сфера компактна при любом n.

1.11. Докажите, что замкнутое подмножество компакта компактно и что компактное множество в любом хаусдорфовом пространстве замкнуто.

Заметим теперь, что компактное подмножество евклидова пространства должно быть замкнутым (упр. 1.11) и ограниченным (пример 1.22). Мы получаем теорему, обратную к теореме Бореля — Лебега. Существует общая теорема, утверждающая, что топологическое произведение компактных пространств компактно (см. [10]). Здесь мы не будем доказывать ее. Однако нам понадобится один ее частный случай, а именно когда перемножаемые компактные пространства A и B лежат в евклидовых пространствах размерностей m и n. Тогда их произведение есть подпространство в $(n+m)$-мерном пространстве. Так как пространства A и B компактны, они замкнуты и ограничены, согласно только что сделанному замечанию. Поэтому их произведение является замкнутым и ограниченным подмножеством евклидова пространства (проверьте это!). Следовательно, $A \times B$ компактно по теореме Бореля — Лебега.

Компактность является топологическим свойством, поскольку она определяется в терминах открытых множеств. В действительности она сохраняется при любом непрерывном отображении.

Теорема 1.6. *Пусть f: $E \to F$ — непрерывное отображение компактного пространства E на хаусдорфово пространство F. Тогда пространство F является компактным.*

Доказательство. Пусть дано открытое покрытие пространства F, открытые множества которого обозначены через U_i, где i пробегает некоторое множество индексов. Тогда множества $f^{-1}(U_i)$ образуют покрытие пространства E, причем, согласно упражнению 1.6, это открытое покрытие. Так как E компактно, найдется конечный набор, скажем $f^{-1}(U_1)$, ..., $f^{-1}(U_n)$, его покрывающий. Но в таком случае множества U_1, ..., U_n образуют конечное подпокрытие данного покрытия пространства F. Поскольку F, кроме того, предполагается хаусдорфовым, то F является компактным.

1.7. Пространства со счетной базой[1])

(При первом чтении этот раздел можно опустить.) Пусть E — топологическое пространство и $\{U_\alpha\}$ — совокупность некоторых его открытых подмножеств. Она называется *базой* пространства E, если любое открытое подмножество пространства E можно представить как объединение некоторых U_α. В дальнейшем встречаются исключительно топологические пространства *со счетной базой.*

Примеры. 1.23. n-мерное евклидово пространство имеет счетную базу, состоящую из шаров, у которых центры находятся в точках $(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами и радиусы рациональны (докажите, что это база!).

1.24. Если E — топологическое пространство со счетной базой $\{U_n\}$ и F — его подпространство, то F тоже имеет счетную базу, а именно в качестве таковой годится $\{U_n \cap F\}$ (проверьте!).

Упражнение 1.12. В топологическом пространстве со счетной базой из всякого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие. (*Схема доказательства.* Пусть $\{U_n\}$ — счетная база, а $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие. Представив каждое V_α как объединение некоторых U_n, возьмем все U_n, которые при этом встретятся (при всевозможных α); пусть это будут U_{n_1}, $U_{n_2}, \ldots$. Докажите, что $\{U_{n_i}\}$ — счетное покрытие E, и вспомните, что каждое U_{n_i} содержится в некотором V_α.)

§ 2. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

2.1. Введение

Во многих из приведенных выше примеров топологические пространства обладают тем свойством, что на них можно ввести координаты, по крайней мере локально, в окрестности каждой точки. Для евклидова пространства это совершенно очевидно и вытекает прямо из определения. Действительно, каждая точка на самом деле является набором из n действи-

[1]) Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*

тельных чисел — это и есть ее координаты. С другой стороны, рассмотрим двумерную сферу, например единичную сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве. Возьмем точку на полусфере $z > 0$. Здесь $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, так что в действительности точка определяется значениями координат x и y. Таким образом, пару (x, y) можно считать координатами точки на сфере. Но они являются лишь локальными координатами в том смысле, что они однозначно определяют точки только в некотором открытом множестве, а именно в полусфере $z > 0$. Заметим, что отображение, переводящее точку (x, y, z) на сфере в точку $(x, y, 0)$ на плоскости, есть гомеоморфизм полусферы $z > 0$ на открытый единичный круг, и в качестве координат мы на самом деле используем координаты образа точки при этом отображении (рис. 2.1).

С нашей точки зрения интересная особенность этого примера состоит в том, что сферу можно покрыть шестью полусферами с аналогичными свойствами, а именно полусферами $z > 0$, $z < 0$, $y > 0$, $y < 0$, $x > 0$, $x < 0$. Каждая из этих полусфер гомеоморфно отображается на открытый круг, и координаты точек на круге можно использовать как координаты точек на соответствующей полусфере. Например, в полусфере $x > 0$ можно взять за координаты (y, z) и т. д. В таком случае говорят, что сфера покрыта шестью координатными окрестностями (окрестностями, в которых можно ввести локальные координаты).

Можно произвести аналогичный разбор для тора (см. рис. 2.2), хотя сделать все это в явном виде уже несколько труднее. Возьмем тор[1]), который получен вращением вокруг оси y окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, лежащей на плоскости (x, y). Тогда, например, в окрестности точки $(0, 0, 3)$ можно взять за локальные координаты (x, y).

Упражнение 2.1. Постройте полную систему координатных окрестностей, покрывающих тор.

[1]) Отметим для дальнейшего, что область, заключенную внутри тора, называют сплошным тором. — *Прим. ред.*

Заметим, что предыдущие примеры обладали следующим свойством: если (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — локальные координаты точки в двух перекрывающихся ко-

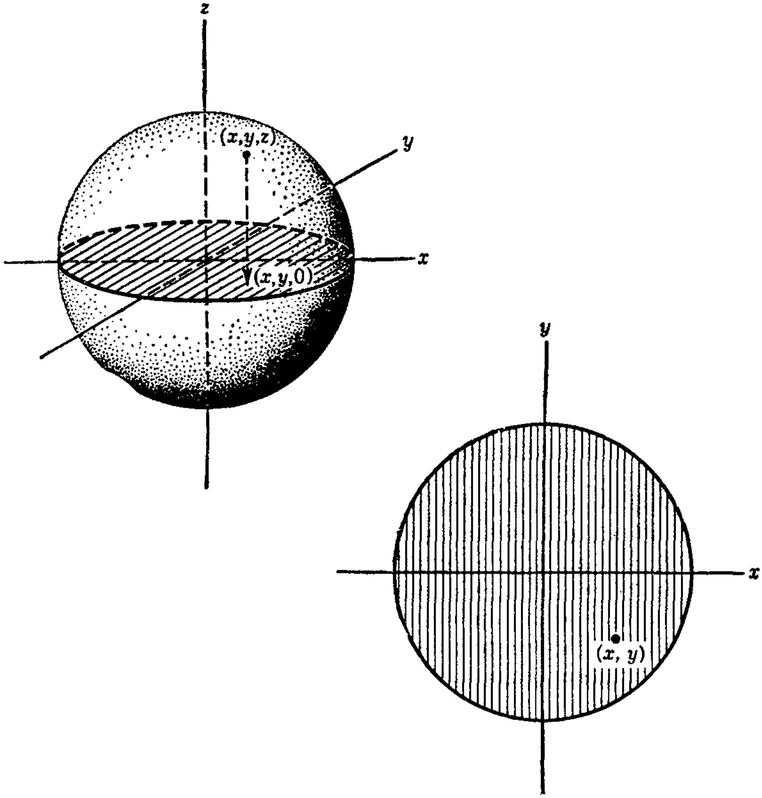


Рис. 2.1. Отождествление верхней полусферы с кругом в плоскости (x, y) посредством проекции.

ординатных окрестностях, то y_1 и y_2 являются дифференцируемыми функциями от x_1, x_2, и наоборот. В случае сферы, например, рассмотрим, как и раньше, системы координат в полусферах $z > 0$ и $x > 0$. Пусть точка имеет в первой из этих окрестностей координаты (x_1, x_2), а во второй (y_1, y_2). Это

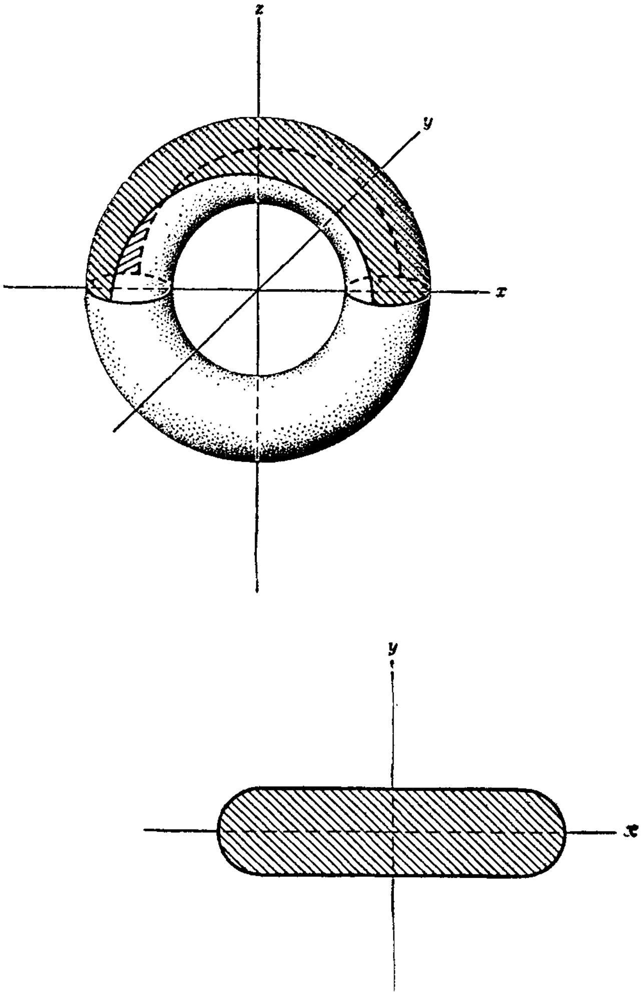


Рис. 2.2. Отождествление «верхней части» тора (заштрихована) с заштрихованной областью в плоскости (x, y).

означает, что если (x, y, z) — ее координаты в объемлющем евклидовом пространстве, то $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = y$, $y_2 = z$. Так как на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$y_1 = x_2,$$
$$y_2 = \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}.$$

Ясно, что функции, стоящие в правой части этих уравнений, обладают частными производными всюду в общей части обеих полусфер [1]). Аналогично

$$x_1 = \left(1 - y_1^2 - y_2^2\right)^{1/2},$$
$$x_2 = y_1,$$

и снова функции в правой части можно дифференцировать в любой точке множества $z > 0$, $x > 0$. Кроме того, легко проверить, что на этом множестве определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Предыдущие примеры, особенно только что описанные свойства локальных систем координат на сфере, дают обоснование для определения того типа пространств, который нас интересует, — гладких многообразий. Сначала мы приведем несколько предварительных определений.

2.2. Гладкие функции и гладкие отображения

Определение 2.1. Пусть U — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве E, и пусть f — функция, определенная в U и принимающая действительные значения. Будем называть функцию f *гладкой*, если в каждой точке из U она имеет

[1]) Точнее, они имеют частные производные при всех тех (x_1, x_2), которые являются координатами точек из общей части этих полусфер. — *Прим. ред.*

непрерывные частные производные всех порядков, которые берутся по координатам в E[1]).

Примеры. 2.1. Многочлен от координат в E является гладким в любом открытом подмножестве пространства E. В этом случае, конечно, все производные достаточно большого порядка обращаются в нуль.

2.2. Функция $|1 - x^2 - y^2|^{1/2}$ (символ $|\ |$ обозначает абсолютную величину числа) на двумерном евклидовом пространстве не будет гладкой ни в каком открытом множестве, содержащем хоть одну точку окружности $x^2 + y^2 = 1$, в любом же открытом множестве, не содержащем точек окружности, она будет гладкой.

2.3. Рассмотрим функцию на действительной прямой, определенную следующим образом:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) \quad \text{при} \quad -1 < x < 1,$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant x \ \text{или} \ x \leqslant -1.$$

В качестве упражнения проверить, что эта функция имеет производные всех порядков во всех точках прямой. Таким образом, f — гладкая функция на всей прямой. (Напомним, что $\frac{1}{t^n} e^{-1/t} \to 0$, когда t стремится к 0, пробегая положительные значения.)

2.4. Последний пример можно использовать для построения других примеров в пространствах бóльших размерностей. Пусть $r^2 = \sum x_i^2$ есть квадрат расстояния до нуля в евклидовом n-мерном пространстве. Определим тогда функцию f следующим образом:

$$f(p) = \exp\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right) \quad \text{при} \quad r < 1,$$
$$f(p) = 0 \qquad \text{при} \quad r \geqslant 1.$$

[1]) Точнее, такие функции называются гладкими функциями *класса гладкости* C^∞. Если у f имеются непрерывные частные производные до порядка n включительно, то f — *класса гладкости* C^n. Функции класса C^0 — это просто непрерывные функции. Поскольку у Уоллеса встречаются только функции класса C^∞, он опускает упоминание о классе гладкости и говорит просто «гладкая функция». — *Прим. ред.*

Снова получается гладкая функция во всем n-мерном пространстве.

Заметим, что только что построенная функция обладает следующими свойствами: она гладкая во всем евклидовом пространстве, равна нулю вне некоторого открытого множества (единичного шара) и не обращается в нуль внутри этого множества. Функции с такими свойствами будут полезны нам в дальнейшем.

Упражнение 2.2. Методом, аналогичным использованному в последнем примере, постройте функцию, гладкую во всем n-мерном пространстве, равную 1 на замкнутом шаре $\sum x_i^2 \leqslant 1$ и нулю вне шара $\sum x_i^2 < 4$.

Иногда встречаются функции, заданные на множествах, которые не являются открытыми, и в таких случаях определение 2.1 необходимо дополнить.

Оределение 2.2. Пусть f — функция, заданная на множестве A в n-мерном евклидовом пространстве и принимающая действительные значения. Будем называть функцию f *гладкой на множестве* A, если ее можно так продолжить на открытое множество U, содержащее A, что она будет гладкой в U.

Вот естественное обобщение понятия гладкости на отображения евклидовых пространств друг в друга.

Определение 2.3. Пусть A — множество в евклидовом m-мерном пространстве, и пусть даны n гладких на A функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Определим отображение f множества A в n-мерное евклидово пространство, беря в качестве образа $f(x)$ точки $x \in A$ точку с координатами $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. В этом случае f называется *гладким отображением множества A в n-мерное пространство.*

Заметим, что для $n = 1$ гладкое отображение превращается просто в гладкую функцию на A в смысле определения 2.2.

В изучении гладких отображений большую роль играет матрица, составленная из первых частных производных функций f_i (в обозначениях определения 2.3).

Определение 2.4. Матрица, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $\partial f_i/\partial x_j$, называется *матрицей Якоби* гладкого отображения. Если $n = m$, то ее определитель называется *якобианом* отображения [1]).

Упражнения. 2.3. Пусть f — гладкое отображение открытого множества A, лежащего в m-мерном евклидовом пространстве, в n-мерное пространство, и пусть g — гладкое отображение открытого множества, содержащего $f(A)$, в p-мерное пространство. Докажите, что композиция gf есть гладкое отображение множества A в p-мерное пространство. Докажите также, что если F — значение матрицы Якоби отображения f в точке x, а G — значение матрицы Якоби для g в точке $f(x)$, то значение матрицы Якоби для gf в точке x равно GF.

2.4. Пусть f — гладкое отображение открытого множества U, лежащего в n-мерном евклидовом пространстве, в n-мерное пространство, и пусть f имеет гладкое обратное отображение. Покажите, что якобиан отображения f отличен от нуля во всех точках множества U.

Справедливо утверждение, обратное к результату упражнения 2.4. Оно называется теоремой об обратной функции и формулируется следующим образом:

Теорема 2.1. *Пусть f — гладкое отображение открытого множества U, лежащего в n-мерном пространстве, в n-мерное пространство, и пусть p — точка множества U. Предположим, что якобиан отображения f не равен нулю в точке p. Тогда существует такая окрестность V точки p и такая окрестность W точки $f(p)$, что f гомеоморфно отображает V на W и что обратное к f отображение является гладким отображением окрестности W на V.*

---

[1]) Заметим, что если множество A не является открытым, то матрица Якоби гладкого отображения $f\colon A \to E$ (E есть n-мерное пространство), вообще говоря, может не определяться однозначно самим отображением f, а зависеть от конкретного выбора продолжений функций f_i на содержащее A открытое множество. — *Прим. ред.*

Доказательство этого результата можно найти в [16] или в [18].

Заметим, что эта теорема дает лишь локальное обращение отображения f. В общем случае больше ничего сказать нельзя. Например, пусть U — плоскость (x, y) с выкинутым началом координат. Используя комплексную переменную $z = x + iy$, определим отображение множества U на себя формулой $f(z) = e^z$. Если записать действительные координаты точки $f(z)$ как (u, v), то отображение f с помощью действительных функций можно выразить формулами:

$$u = e^x \cos y,$$
$$v = e^x \sin y.$$

Легко видеть, что это гладкое отображение множества U на себя и что якобиан не равен нулю ни в одной точке этого множества. Конечно, по теореме 2.1 отображение f можно обратить локально. И в самом деле, обратное отображение задается формулой $z = \log(u + iv)$ в любом множестве, не окружающем целиком начало координат. Но f не будет взаимно однозначным во всем U, ибо, если изменить y, добавив к нему целое кратное 2π, то значение $f(z)$ не изменится.

2.3. Гладкие многообразия

После всех приготовлений, сделанных в предыдущем параграфе, мы теперь в состоянии сформулировать определение того типа пространств, которые нас интересуют, — гладких многообразий.

Определение 2.5. *n-мерное гладкое многообразие M* есть хаусдорфово топологическое пространство, покрытое счетным числом открытых множеств $U_1, U_2, \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) Для каждого U_i имеется гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$, где V_i — открытая клетка [1]) в евклидовом пространстве.

---

[1]) *Замкнутая n-мерная клетка* — это множество W в евклидовом пространстве, гомеоморфное замкнутому шару $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$, причем гомеоморфизмы

2) Если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то гомеоморфизм $\varphi_{ji} = \varphi_j\varphi_i^{-1}$ множества $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_j(U_i \cap U_j)$, полученный композицией отображений φ_i^{-1} и φ_j, является гладким отображением[1]).

Число n называют *размерностью* многообразия M (обозначение: $\dim M$).

$f: D^n \longrightarrow W$ и $f^{-1}: W \longrightarrow D^n$ являются гладкими отображениями. (Позднее такие гомеоморфизмы получат название диффеоморфизмов. Они будут определены для многообразий, и тогда можно будет говорить о клетках не только в евклидовом пространстве, но и в гладком многообразии.) *Открытая клетка* — это часть некоторой замкнутой клетки, которая при указанном гомеоморфизме соответствует внутренности шара.

Обычно в определении гладкого многообразия требуется лишь, чтобы V_i было открытым множеством в евклидовом пространстве, но не обязательно клеткой. Оба варианта определения в действительности эквивалентны — при необходимости можно добиться, уменьшая U_i и увеличивая их число, чтобы все V_i стали клетками. — *Прим. ред.*

[1]) Говорят также, что покрытие U_i и гомеоморфизмы φ_i задают (определяют, вводят) *гладкость* (или *гладкую структуру*) на исходном топологическом пространстве.

Следует иметь в виду, что гладкое многообразие — это не просто хаусдорфово пространство, допускающее такое покрытие с такими гомеоморфизмами, как в определении 2.5, а хаусдорфово топологическое пространство *вместе* с таким покрытием и такими гомеоморфизмами. Ради краткости покрытие $\{U_i\}$ и набор гомеоморфизмов φ_i (удовлетворяющих приведенным условиям) часто называют *атласом*, а пару (U_i, φ_i) — *картой*.

Возникает вопрос: когда одно и то же хаусдорфово пространство с двумя различными атласами следует считать одним и тем же гладким многообразием (т. е. когда эти атласы определяют одну и ту же гладкую структуру), а когда — нет? (Чуть ниже, в примере 2.6 описан атлас на сфере S^2, состоящий из шести карт (U_i, φ_i). Но можно взять другой атлас, состоящий из двух карт (U_1', φ_1'), (U_2', φ_2'), где U_1' получается из сферы выбрасыванием северного полюса, U_2' — выбрасыванием южного полюса, а φ_i' определяются с помощью стереографической проекции (см. Милнор, рис. 3). Естественно считать, что хотя эти два атласа и разные, гладкое многообразие в данном случае одно и то же.) Следующие соображения подсказывают ответ.

Роль карты (U_i, φ_i) состоит в том, что при помощи гомеоморфизма φ_i вводится некоторая система координат в открытом множестве U_i: если $x \in U_i$, то $\varphi_i(x)$ — это точка евклидова пространства, т. е. набор чисел; их мы и принимаем за координаты точки x. Условие 2) в определении 2.5 означает, что карты одного

Заметим, что отображение φ_{ji} в условии 2) автоматически имеет обратное, а именно φ_{ij}. Поэтому его якобиан будет отличен от нуля во всех точках множества $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Условие счетности, включенное

и того же атласа согласуются друг с другом в том смысле, что координаты точки x в карте φ_j суть гладкие функции координат той же точки в карте φ_i. Но мы можем и для карт двух разных атласов говорить об их согласованности (или несогласованности) в том же самом смысле. Эти соображения мотивируют следующее определение.

Определение 2.5′. Два разных атласа $\{(U_i, \varphi_i)\}$ и $\{(U'_k, \varphi'_k)\}$, заданные на одном и том же топологическом пространстве, называются *согласованными или совместимыми друг с другом* при выполнении такого условия:

если $U_i \cap U'_k \neq \varnothing$, то, во-первых, гомеоморфизм $'\varphi_{ki} = \varphi'_k\varphi_i^{-1}$ множества $\varphi_i(U_i \cap U'_k)$ на $\varphi'_k(U_i \cap U'_k)$, полученный композицией φ_i^{-1} и φ'_k, является гладким отображением; во-вторых, гомеоморфизм $\varphi'_{ik} = \varphi_i(\varphi'_k)^{-1}: \varphi'_k(U_i \cap U'_k) \to \varphi_i(U_i \cap U'_k)$ тоже является гладким отображением. (Можно дать более сжатую формулировку: совокупность всех карт обоих атласов снова образует атлас.)

По определению считают, что два атласа тогда и только тогда задают одну и ту же гладкую структуру, когда они совместимы.

(Легко видеть, что в приведенном примере со сферой оба атласа действительно согласованы. А вот пример несовместимых атласов на прямой R. Оба атласа состоят всего из одной карты, так что $U_1 = U'_1 = R$. Гомеоморфизм $\varphi_1: R \to R$, как и в примере 2.5, тождественный, а гомеоморфизм $\varphi'_1: R \to R$ переводит x в x^3. Отображение φ'_{11} не будет гладким.)

В определении 2.5 от отображений φ_{ji} можно потребовать гладкости класса C^n (см. прим. ред. на стр. 33); тогда получится определение *гладкой структуры* или *гладкого многообразия класса* C^n. (Согласно этой терминологии, «гладкие многообразия» Уоллеса имеют класс C^∞. Многообразия класса C^0, естественно, называют уже не гладкими, а *топологическими*.) Аналогичные изменения можно сделать и в других определениях, например из определения 2.5′ получится определение «C^n-согласованности» атласов. В топологии существенным является только различие между C^0 и всеми остальными C^n, $1 \leqslant n \leqslant \infty$: сравнительно несложно доказать, что на многообразии класса C^n, $n \geqslant 1$, существует атлас, превращающий его в многообразие класса C^∞ и C^n-эквивалентный исходному атласу (см. [18]), в то же время недавно было доказано, что существуют топологические многообразия, на которых невозможно ввести гладкую структуру. — *Прим. ред.*

в это определение, для наших рассмотрений не будет играть никакой роли [1]). Вообще же оно налагается, чтобы исключить некоторые патологические случаи.

Примеры. 2.5. n-мерное евклидово пространство удовлетворяет условиям этого определения очевидным образом. Действительно, за открытое покрытие можно взять покрытие, которое состоит только из одного множества U_1 — всего пространства; за V_1 также можно взять все n-мерное пространство, а за φ_1 — тождественное отображение.

2.6. Возвращаясь к разд. 2.1, мы видим, что двумерная сфера S^2 удовлетворяет условиям определения 2.5. Действительно, шесть полусфер, которые там описаны, образуют открытое покрытие сферы и выполняют роль множеств U_i. Если за U_1 взять, например, полусферу $z > 0$, то φ_1 будет отображением, переводящим точку (x, y, z) множества U_1 в точку (x, y); за V_1 берется единичный круг с центром в начале координат. Аналогично если U_2 — полусфера $x > 0$, то $\varphi_2(x, y, z) = (y, z)$. Отображение φ_{12} задается формулой $\varphi_{12}(y, z) = ((1 - y^2 - z^2)^{1/2}, y)$ и является гладким. Случай других φ_{ij} разбирается аналогично.

Упражнения. 2.5. Действуя по аналогии с рассуждениями предыдущего примера, докажите, что n-мерная сфера S^n является гладким n-мерным многообразием.

2.6. *Проективная плоскость* P^2 получается из двумерной сферы S^2 отождествлением диаметрально противоположных точек. Таким образом, точка из P^2 — это пара диаметрально противоположных точек на сфере. Для точки из P^2, определяемой парой точек p_1, p_2 на сфере S^2, рассмотрим открытый круг U_1 на S^2 с центром в точке p_1 и открытый круг U_2 с центром в p_2, точки которого противоположны точкам круга U_1. Назовем совокупность пар точек, лежащих внутри пары окрестностей U_1 и U_2, окрестностью точки p в P^2. Определим топологию в P^2, объявив окрестностью точки p любое множество, содержащее окрестность

[1]) Точнее, оно не существенно для простейшего материала этого параграфа и начала следующего; в дальнейшем же многообразия обычно предполагаются компактными, что позволяет считать атласы не только счетными, но и конечными. Поэтому при первом чтении на условие счетности можно просто не обращать внимания. При более детальном изучении рекомендуется доказать самостоятельно, что это условие эквивалентно тому, что топологическое пространство M имеет счетную базу (см. разд. 1.7). — *Прим. ред.*

только что описанного вида. Докажите, что P^2 является двумерным гладким многообразием.

2.7. Обобщите предыдущее упражнение, определив *проективное пространство* P^n как пространство, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек n-мерной сферы. Окрестности определяются так же, как в упражнении 2.6. Докажите, что P^n — гладкое многообразие.

2.8. Пусть X — множество наборов из $n+1$ действительных чисел, исключая набор из $n+1$ нулей. Определим отношение $\sim$, сказав, что $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (cx_0, cx_1, \ldots, cx_n)$, где c — любое действительное число, отличное от нуля. Покажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности [1]) в X и что классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с точками проективного пространства P^n, построенного в упражнении 2.7. Пусть U_i — множество точек в P^n, представители которых в X имеют $x_i \neq 0$. Тогда каждая точка из U_i имеет представитель вида $(x_0, x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ с 1 на i-м месте. Пусть φ_i — отображение множества U_i в n-мерное пространство, переводящее точку с представителем $(x_0, x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ в точку $(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Покажите, что полученные таким образом множества U_i и отображения φ_i обладают теми свойствами, о которых говорится в определении 2.5, и превращают P^n в гладкое многообразие.

2.9. Упражнение 2.8 приводит к следующей конструкции: пусть Z — множество наборов $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ из $n+1$ комплексных чисел, исключая набор из $n+1$ нулей. Напишем $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \sim (cz_0, cz_1, \ldots, cz_n)$, где c — любое ненулевое комплексное число. Проверьте, что $\sim$ есть отношение эквивалентности в Z. Пусть CP^n — множество классов эквивалентности. Пусть U_i — множество элементов CP^n, имеющих представителей вида $(z_0, z_1, \ldots, 1, \ldots, z_n)$ с единицей на i-м месте, и пусть отображение φ_i переводит элемент такого вида в точку с координатами $(z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ в n-мерном комплексном пространстве, которое топологически эквивалентно $2n$-мерному евклидову пространству. Покажите, что на CP^n можно ввести топологию так, чтобы все U_i стали открытыми множествами, а φ_i — гомеоморфизмами и чтобы после этого множества U_i и отображения φ_i превратили CP^n в $2n$-мерное гладкое многообразие. CP^n называется *n-мерным комплексным проективным пространством.*

2.10. Докажите, что тор (см. § 2.1) является двумерным гладким многообразием.

2.4. Локальные координаты и гладкие функции

Идея вводимого ниже понятия неявно содержится уже в определении 2.5. А именно, гомеоморфизм φ_i отождествляет множество U_i с V_i, так что евклидовы

[1]) Определение см. в книге: Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен, Современная математика, «Мир», М., 1966, стр. 34. — *Прим. ред.*

координаты на V_i можно использовать для того, чтобы задавать («нумеровать») ими соответствующие точки в U_i. Таким образом, можно считать, что отображение φ_i вводит в множестве U_i систему координат или, по крайней мере, локальную систему координат. Слово «локальная» означает, что координаты введены только в открытом множестве U_i, а не на всем многообразии. Это приводит к мысли, что можно было бы определить понятие гладкой функции на многообразии, используя дифференцирование по координатам, определяемым отображениями φ_i. Основной момент — проверить, что, определяя это понятие при помощи различных φ_i, мы не придем к противоречию.

Для проверки этого рассмотрим функцию f с действительными значениями, определенную на открытом множестве U гладкого многообразия M. Возьмем точку p из U и предположим, что она попадает в множество U_i того открытого покрытия, которое участвует в определении M. Рассмотрим функцию $f\varphi_i^{-1}$, определенную на множестве $\varphi_i(U \cap U_i)$. Эту функцию можно представлять себе как функцию f, выраженную через локальные координаты в U_i, определяемые отображением φ_i. Если точка p попадет также в другое открытое множество покрытия, скажем U_j, то точно так же функция $f\varphi_j^{-1}$ определена в окрестности точки $\varphi_j(p)$.

Лемма 2.1. *Функция $f\varphi_i^{-1}$ будет гладкой в окрестности точки $\varphi_i(p)$ тогда и только тогда, когда $f\varphi_j^{-1}$ будет гладкой в окрестности точки $\varphi_j(p)$.*

Доказательство. Это устанавливается мгновенно, поскольку $f\varphi_i^{-1}$ можно записать как $f\varphi_j^{-1}\varphi_j\varphi_i^{-1} = f\varphi_j^{-1}\varphi_{ji}$. Если функция $f\varphi_j^{-1}$ гладкая, то такой же будет и $f\varphi_i^{-1} = f\varphi_j^{-1}\varphi_{ji}$ как композиция гладких функций (упражнение 2.3).

Лемма, таким образом, утверждает, что если функция f, будучи выражена через координаты, определенные при помощи отображения φ_i, окажется гладкой, то гладкой она будет и при выражении через координаты, определяемые отображением φ_j (и наоборот).

Определение 2.6. Будем называть функцию f *гладкой в окрестности точки* p в том и только в том случае, когда в предыдущих обозначениях функция $f\varphi_i^{-1}$ будет гладкой в некоторой окрестности точки $\varphi_i(p)$.

Лемма утверждает, что сформулированное здесь условие не зависит от того, какое из отображений φ_i используется для проверки гладкости.

Назовем функцию f *гладкой в открытом множестве* U, если она является гладкой в окрестности каждой точки из U. Назовем ее *гладкой в произвольном множестве* A, если она гладкая в некотором открытом множестве, содержащем A.

Упражнения. 2.11. Пусть M — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве. Докажите, что каждая из евклидовых координат x, y, z является гладкой функцией на M.

2.12. Докажите то же, что и в упражнении 2.11, для тора из § 2.1.

2.13. Пусть M — гладкое многообразие и p — точка на M. Покажите, что существует окрестность U точки p и гладкая функция f на M, которая положительна на U и равна нулю в каждой точке вне U. (*Указание*: возьмите за U окрестность с локальными координатами, которая отображается на открытое множество V в евклидовом пространстве. Затем надо уменьшить U до некоторой окрестности U', которой соответствует шар V' в евклидовом пространстве с замыканием $\overline{V'} \subset V$. Выберите масштаб и начало координат так, чтобы V' стал шаром единичного радиуса с центром в начале координат. После этого воспользуйтесь примером 2.4.)

2.14. Пусть A — компактное множество в гладком многообразии M, а U — открытое множество, содержащее A. Используя подходящее конечное покрытие множества A окрестностями такого типа, как в предыдущем упражнении, постройте гладкую на M функцию f, которая положительна на A и равна 0 вне U. Добавив к имеющемуся покрытию множества A новые координатные окрестности, получите вторую функцию g, которая равна f на A и не обращается в нуль в окрестности замыкания множества тех точек, где $f \neq 0$. Рассматривая частное f/g, постройте гладкую на M функцию, которая равна 1 на множестве A, нулю вне U и принимает значения, заключенные между 0 и 1.

Заметим, что если V_i — одна из открытых клеток в определении 2.5, то каждая евклидова координата на V_i является гладкой функцией на соответствующем множестве U_i в M. Другими словами, в каждом множестве U_i имеется набор из n гладких функций, значения которых в точке можно взять за координаты этой точки (локально в U_i). Это наводит на мысль расширить понятие локальной системы координат, беря в качестве координат в некоторой окрестности (не обязательно в одной из U_i) значения n функций, гладких в этой окрестности. Конечно, для того чтобы эти координаты соответствовали гомеоморфизму окрестности на евклидову клетку, на них необходимо наложить некоторые условия.

Итак, пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — функции, гладкие в некоторой окрестности точки p на M, и пусть p лежит в U_i (в обозначениях определения 2.5). Тогда $f_1\varphi_i^{-1}, f_2\varphi_i^{-1}, \ldots, f_n\varphi_i^{-1}$ — функции, гладкие в смысле определения 2.2 в окрестности точки $\varphi_i(p) \in V_i$. Предположим, что якобиан этих функций, вычисленный в евклидовых координатах на V_i, отличен от нуля в точке $\varphi_i(p)$. Отобразим тогда окрестность точки $\varphi_i(p)$ в n-мерное евклидово пространство, переводя точку x в точку с координатами $(f_1\varphi_i^{-1}(x), f_2\varphi_i^{-1}(x), \ldots, f_n\varphi_i^{-1}(x))$. Обозначим полученное отображение через f. По теореме 2.1 найдется такая окрестность V точки $f\varphi_i(p)$ (которую всегда можно сделать клеткой) и такая окрестность U' точки $\varphi_i(p)$, что f гомеоморфно отображает окрестность U' на V, причем обратное отображение тоже гладкое. Наконец, положим $U = \varphi_i^{-1}(U')$ и $\varphi = f\varphi_i$. Таким образом, φ отображает точку $q \in U$ в точку с координатами $(f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q))$. Ясно, что φ является гомеоморфизмом окрестности U на V.

Определение 2.7. Гомеоморфизм φ мы будем называть *локальной системой координат в окрестности U точки p.*

Множество U называется *координатной окрестностью*, соответствующей этой системе[1]).

Это определение мотивировано тем, что точки из U определяются координатами их образов при отображении φ. Заметим, что множества U_i с отображениями φ_i автоматически являются локальными системами координат в смысле этого определения.

Упражнения. 2.15. Покажите, что определение локальных координат в окрестности точки не зависит от выбора отображения φ_i, участвующего в построении.

2.16. Пусть φ и ψ — произвольные локальные системы координат в точке p, отображающие окрестности точки p на открытые клетки V и W соответственно и лежащие в n-мерных евклидовых пространствах. Покажите, что $\varphi\psi^{-1}$ является гладким отображением открытого множества в W на открытое множество в V и что якобиан этого отображения отличен от нуля.

Результат упражнения 2.16 означает, что можно добавлять к координатным окрестностям U_i, участвующим в определении гладкого многообразия, любые координатные окрестности в смысле определения 2.7, и расширенный таким образом набор локальных систем координат по-прежнему будет удовлетворять условию (2) определения 2.5.

2.17. Пусть p — точка на гладком многообразии M, и пусть φ — локальная система координат в окрестности U точки p в

---

[1]) Уоллес заинтересован главным образом в координатах, введенных возле точки p, т. е. в некоторой ее окрестности — безразлично, насколько малой. Поэтому он дает определение применительно к рассмотренному в предыдущем абзаце случаю, в котором, напомним, $U \subset U_i$. Общее же определение таково: Пусть $U \subset M$ — открытое множество и $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм множества U на открытое подмножество V евклидова пространства, и пусть выполняется условие: если $U \cup U_i \neq \varnothing$, то отображения

$$\varphi\varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U \cap U_i) \to \varphi(U \cap U_i), \quad \varphi_i\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U_i) \to \varphi_i(U \cap U_i)$$

гладкие. Тогда φ будем называть (*локальной*) *системой координат в координатной окрестности* U (а пару (U, φ) — *картой*).

Читатель легко проверит, что если (U, φ) и (U', φ') — две карты в этом общем смысле и $U \cap U' \neq \varnothing$, то для них выполняется условие согласованности (аналогичное уже встречавшимся в определениях 2.5 и 2.5′, а также в предыдущем абзаце): отображения

$$\varphi'\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U'), \quad \varphi(\varphi')^{-1}\colon \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$$

гладкие. — *Прим. ред.*

смысле определения 2.7. Пусть f — гладкая функция в окрестности точки p (определение 2.6). Покажите, что $f\varphi^{-1}$ является гладкой функцией в окрестности точки $\varphi(p)$ в V (обозначения взяты из определения 2.7).

Смысл этого результата состоит в том, что хотя понятие гладкой функции определяется только при помощи координатных окрестностей U_i, участвующих в определении многообразия, однако оно допускает точно такое же описание в терминах дополнительных локальных систем координат, введенных в определении 2.7.

2.18. Рассмотрим плоскость (x, y) как гладкое многообразие. Покажите, что полярные координаты (r, θ), определенные равенствами $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, можно взять за локальные координаты в любом открытом круге, не содержащем начало координат.

2.19. Аналогично покажите, что сферические координаты, определенные равенствами $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$, можно взять за локальные координаты трехмерного пространства в любом открытом шаре, не пересекающем оси z.

2.20. Сферические координаты в предыдущем упражнении можно ограничить на единичную сферу, положив $r = 1$. Покажите, что (θ, φ) можно взять в качестве локальных координат на сфере в любом круге, не содержащем точку с евклидовыми координатами $(0, 0, \pm 1)$.

2.5. Гладкие отображения

В разделе 2.2 мы видели, что, рассматривая наборы гладких функций на открытом множестве в евклидовом пространстве, можно определить понятие гладкого отображения. Сейчас нам предстоит сделать то же самое в более общей ситуации, чтобы определить гладкое отображение одного многообразия в другое. В теории гладких многообразий гладкие отображения играют ту же роль, какую играют непрерывные отображения в общей теории топологических пространств. Идея приводимого ниже определения — использовать локальные системы координат для того, чтобы перенести уже знакомое нам определение 2.3 на гладкие многообразия.

Определение 2.8. Пусть M, N — гладкие многообразия размерностей m и n соответственно, U — открытое множество в M, а f — отображение многообразия U в многообразие N. Пусть p — точка из U, и пусть φ — локальная система координат на N в окрестности W точки $f(p)$; таким образом, φ является гомеоморфизмом множества W на открытую клетку V в некотором евклидовом пространстве размерности n. Тогда композиция φf является отображением окрестности точки p в клетку V, которое можно описать с помощью функций, рассматривая каждую координату на V как функцию, определенную в окрестности точки p. Если все эти функции гладкие, то мы будем говорить, что отображение f *гладкое в окрестности точки* p. Отображение f будем называть *гладким в* U, если оно гладкое в окрестности каждой точки из U.

Заметим, что определение 2.8 можно также сформулировать следующим образом. Пусть ψ — локальная система координат в окрестности U_0 точки p, про которую мы предполагаем, что $U_0 \subset U$. Таким образом, отображение ψ есть гомеоморфизм окрестности U_0 на открытую клетку V_0 в n-мерном евклидовом пространстве. В этом случае композиция $\varphi f \psi^{-1}$ является отображением множества V_0 в V. В определении 2.8 говорится, что если это отображение гладкое, то f — гладкое отображение в окрестности точки p. Другой момент, который следовало бы отметить (и проверить в качестве упражнения!), — то, что определение гладкости отображения не зависит от того, какая система координат выбирается в окрестности точки $f(p)$. Другими словами, если сформулированное условие выполняется для одной локальной системы координат, то оно выполняется и для любой другой системы.

Определение 2.8 следующим образом обобщается на отображения, заданные на произвольных множествах.

Определение 2.9. Пусть M и N — два гладких многообразия, A — подмножество в M, а f — отображение A в многообразие N. Будем называть f *гладким*, если его можно продолжить до гладкого отображения $U \to N$, где U — открытое множество, содержащее A.

Примеры. 2.7. Заметим, что если взять в качестве M и N евклидовы пространства, то определения 2.8 и 2.9 сводятся к определению 2.3.

2.8. Любая гладкая функция на подмножестве U гладкого многообразия M (определение 2.6) является гладким отображением в одномерное евклидово пространство. Более общо, если $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — гладкие функции на U, то отображение, переводящее точку p в точку с координатами $(f_1(p), f_2(p), \ldots, f_r(p))$, есть гладкое отображение множества U в r-мерное евклидово пространство.

Упражнения. 2.21. Пусть M — тор в трехмерном пространстве, и пусть (l, m, n) — направляющие косинусы внешней нормали к M в точке p. Тогда, поскольку $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, тройку (l, m, n) можно рассматривать как координаты точки на двумерной единичной сфере в трехмерном пространстве. Возьмем эту точку за $f(p)$. Докажите, что f есть гладкое отображение многообразия M в сферу S^2.

2.22. Положение точки q на торе в трехмерном пространстве можно задавать следующим образом. Пусть тор задан тем же способом, что и в разд. 2.1. Возьмем точку на окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ в плоскости (x, y), для которой луч, направленный к ней из центра окружности, образует угол θ с положительным направлением оси x. Проведем через эту точку окружность, параллельную плоскости (x, z) и лежащую на торе, а затем возьмем точку, смещенную на угловое расстояние φ по этой окружности (рис. 2.3). Тогда положение точки q можно задавать парой (θ, φ). Заметим, что это не есть система координат на всем торе, так как для данной точки q углы θ и φ определены только с точностью до целого кратного 2π. Покажите, что (θ, φ) тем не менее можно принять за локальные координаты в подходящих открытых подмножествах тора. Возьмем теперь точку p с координатами (x, y) на плоскости, и пусть $f(p)$ — точка на торе с угловыми координатами (в только что указанном смысле) $\theta = x$, $\varphi = y$. Докажите, что f — гладкое отображение двумерного евклидова пространства на тор.

Заметим, что если отображение f ограничить на квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, то оно будет взаимно однозначным внутри этого квадрата, а точки на сторонах, лежащие друг против друга, отобразятся в одну точку. Для наглядности говорят, что тор получается из квадрата отождествлением пар противоположных сторон.

Другая интерпретация этого упражнения получится, если принять каждый из углов θ, φ за угловую координату на окружности. Тогда тор представится в виде топологического произведения двух окружностей.

2.23. Пусть M, N и P — гладкие многообразия, и пусть $f: M \to N$ и $g: N \to P$ — гладкие отображения. Покажите, что композиция gf является гладким отображением.

2.24. Пусть p — точка на двумерной сфере S^2, а $f(p)$ — точка на проективной плоскости P^2, полученная отождествлением p

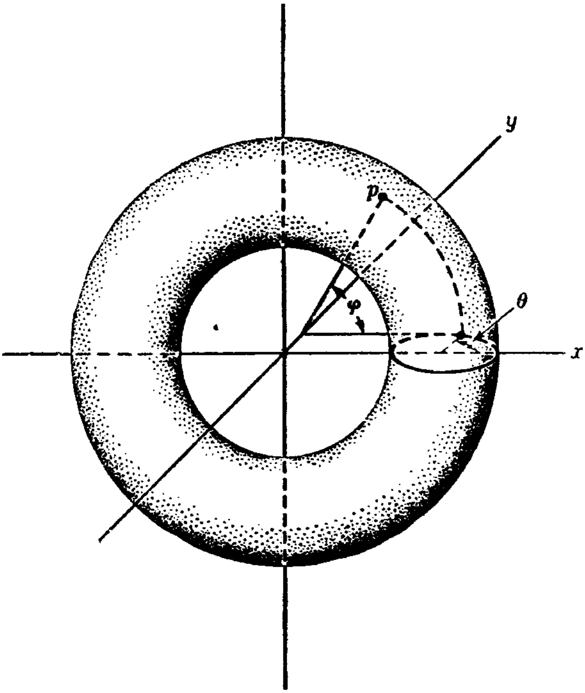


Рис. 2.3. Точки тора «задаются» с помощью углов θ, φ.

с диаметрально противоположной точкой (см. упражнение 2.6). Покажите, что f — гладкое отображение сферы S^2 на P^2.

В общей топологии мы рассматриваем гомеоморфные пространства как одинаковые. В нашем случае, для того чтобы два гладких многообразия считались одинаковыми, должно выполняться более сильное условие диффеоморфности.

Определение 2.10. Пусть M и N — гладкие многообразия, а f — такое взаимно однозначное отображение многообразия M на N, что обратное отображение тоже является гладким. Тогда f называется *диффеоморфизмом*, а многообразия M и N — *диффеоморфными*[1]).

Упражнение. 2.25. Пусть f — взаимно однозначное отображение гладкого многообразия M на N. Пусть φ — локальная система координат в окрестности точки p на M, а ψ — локальная система координат в окрестности $f(p)$ на N, так что $\psi f \varphi^{-1}$ есть гладкое отображение одной n-мерной клетки на другую. Предположим, что якобиан этого отображения, записанного в евклидовых координатах, не равен нулю в окрестности точки $\varphi(p)$. Пусть это условие выполнено для любой точки p. Докажите, что f — диффеоморфизм.

Заметим, что это упражнение дает другой способ формулировать определение 2.10. Отметим также, что диффеоморфные многообразия автоматически имеют одну и ту же размерность (почему?).

2.6. Ранг гладкого отображения

Естественность определения, которое мы здесь введем, вытекает из следующего наблюдения: гладкое отображение, определенное на многообразии, может привести к падению размерности. Рассмотрим,

---

[1]) Говорят также, что диффеоморфны гладкие структуры, заданные на M и N. Допуская вольность речи, о двух диффеоморфных многообразиях часто говорят как об одном и том же многообразии.

В примечании на стр. 38 указаны два несовместимых атласа (U_1, φ_1) и (U_1', φ_1') на прямой линии R. Прямая с атласом (U_1, φ_1) и она же с атласом (U_1', φ_1') — это, строго говоря, две разные гладкие структуры на R, два разных гладких многообразия. Но ясно, что они диффеоморфны (отображение ψ: $x \to x^3$ является диффеоморфизмом второго из них на первое). Легко видеть, что на самом деле на R можно ввести континуум различных гладких структур, однако можно доказать, что все они диффеоморфны друг другу. Последнее часто выражают словами: «на прямой существует только одна гладкая структура», опуская оговорку: «с точностью до диффеоморфизма».

Часто можно прочитать примерно следующее: «Выделение дифференциальной топологии в самостоятельный раздел науки можно датировать моментом открытия Милнором различных гладких структур на семимерной сфере [20]». С учетом некоторой патетики этой фразы, как вам кажется — подразумевается ли в ней вышеупомянутая оговорка? — *Прим. ред.*

например, отображение f плоскости в себя, переводящее точку (x, y) в точку $(x, 0)$. Здесь отображение f задано на чем-то двумерном, а его образ имеет размерность 1. Хотя это понадобится нам лишь в следующей главе, отметим, что в только что приведенном примере якобиан отображения всюду равен нулю. С другой стороны, если бы этот якобиан был всюду ненулевым, то отображение f имело бы локальное обратное и потому следовало бы ожидать, что его образ будет двумерным. Тем самым падение размерности должно быть как-то связано с рангом матрицы Якоби отображения f.

Определение 2.11. Пусть M и N — гладкие многообразия, и пусть f: $M \to N$ — гладкое отображение. Пусть $p \in M$, и пусть φ: $U \to V$ и ψ: $U' \to V'$ — локальные системы координат в окрестностях точек p и $f(p)$ соответственно. Таким образом, $\psi f \varphi^{-1}$ есть гладкое отображение евклидова открытого множества V в множество V'. В этом случае *ранг отображения f в точке p* определяется как ранг матрицы Якоби отображения $\psi f \varphi^{-1}$ в точке $\varphi(p)$. Если во всех точках ранг равен r, то говорят, что f *имеет ранг* r.

Упражнения. 2.26. Проверьте, что определение 2.11 не зависит от выбора локальных координат в окрестностях точек p и $f(p)$.

2.27. Проверьте, что отображение f плоскости в себя, определенное формулой $f(x, y) = (x, 0)$, имеет всюду ранг 1.

2.28. Пусть f: $M \to N$ — гладкое отображение ранга $m = \dim M \leqslant n = \dim N$. Покажите, что в подходящих локальных координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в окрестности точки p и $(y_1, \ldots, y_n)$ в окрестности $f(p)$ отображение f локально записывается формулами

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = m+1, \ldots, n),$$

где f_i — гладкие функции своих аргументов.

2.7. Многообразия с краем

Существует важное обобщение понятия гладкого многообразия, определенного в разд. 2.3. Пример замкнутого круга D показывает естественность этого обобщения. Внутренняя точка круга p имеет окрестность, представляющую собой открытый круг, однако точка q на границе имеет окрестность (в круге), которая является полукругом. Таким образом, если считать D гладким многообразием, то необходимо рассматривать два типа координатных окрестностей в соответствии с тем, является ли рассматриваемая точка внутренней или нет.

Определение 2.12. *n-мерное гладкое многообразие с краем* — это топологическое пространство M с подпространством N и счетным открытым покрытием $U_1, U_2, \ldots$ с гомеоморфизмами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) Если множество U_i данного покрытия содержится в $M \setminus N$, то соответствующий гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$ отображает U_i на открытый шар V_i в n-мерном пространстве; в противном случае задан гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$, где V_i — полушарие вида $\sum_1^n x_i^2 < 1$, $x_n \geqslant 0$, причем множество $U_i \cap N$ отображается на подмножество в V_i, состоящее из точек, для которых $x_n = 0$.

2) Если U_i и U_j — два множества из данного покрытия, причем $U_i \cap U_j = \varnothing$, а φ_i и φ_j — только что описанные гомеоморфизмы, то $\varphi_i \varphi_j^{-1} = \varphi_{ij}$ есть гладкое отображение множества $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Поскольку гомеоморфизмы φ_{ij} должны переводить внутренние точки во внутренние, а граничные в граничные, очевидно, что если ограничить на подмножество N те U_i, которые его пересекают, то они (т. е. множества $U_i \cap N$) образуют покрытие множества N, определяющее на нем структуру гладкого многообразия; оно называется *краем* многообразия M.

Пример 2.9. Шар и сплошной тор есть трехмерные многообразия с краем, причем краями, конечно, являются сфера и тор соответственно.

Легко видеть, что определения, приведенные в предыдущих разделах этого параграфа, переносятся на гладкие многообразия с краем с незначительными изменениями, учитывающими точки края.

Кроме того, можно показать (но доказательство этого факта трудно и не будет приведено здесь), что если два гладких многообразия с краем имеют диффеоморфные края, то их можно «склеить», отождествив края, и получится новое гладкое многообразие. Этим способом можно, например, склеить два круга так, чтобы получилась сфера. Один круг станет при этом верхней полусферой, другой — нижней, а края отождествятся, образовав экватор.

Более подробно этот процесс можно описать следующим образом. Пусть M_1 и M_2 — гладкие многообразия с краем, N_1 и N_2 — края многообразий M_1 и M_2 соответственно, и пусть $f\colon N_1 \to N_2$ — заданный диффеоморфизм. Построим множество, элементы которого — это точки $M_1 \setminus N_1$, точки $M_2 \setminus N_2$ и пары точек $(p, f(p))$, где $p \in N_1$. Таким образом, M является объединением множеств M_1 и M_2, в котором каждая пара $(p, f(p))$ считается за одну точку, так что пару $(p, f(p))$ можно, не опасаясь двусмысленности, обозначать буквой p. Чтобы превратить M в топологическое пространство, необходимо определить окрестности его точек. Если точка p лежит в $M_1 \setminus N_1$ или в $M_2 \setminus N_2$, то в качестве ее окрестностей в M берутся окрестности этой точки в M_1 или в M_2 соответственно[1]). Если же $p = (p, f(p))$ есть пара отождествленных точек, где точка p лежит в N_1 и $f(p)$ — в N_2, то каждая окрестность точки p в M определяется как объединение некоторой окрестности точки p в M_1 и некоторой окрестности точки $f(p)$ в M_2 с соответствующими отождествлениями точек из N_1 и N_2.

Так, например, на рис. 2.4 две полукруговые окрестности U_1 и U_2 точек p и $f(p)$ склеиваются, образуя окрестность U точки $(p, f(p))$ в M.

Трудный шаг — показать, что M является гладким многообразием. Подробное доказательство этого

[1]) А также, конечно, и любые множества в M, содержащие такие окрестности. (О последнем при описании того или иного примера часто даже не упоминают, считая это само собою разумеющимся.) — *Прим. ред.*

см. в [18, § 6][1]). Мы должны сделать следующее: надо показать, что если окрестность U в M получена склеиванием координатных окрестностей U_1 и U_2, а окрестность V — склеиванием V_1 и V_2, то функции замены координат (функции типа φ_{ij} определения

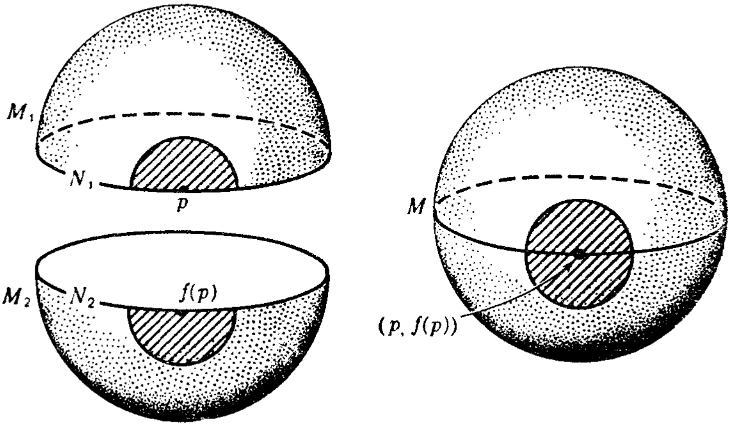


Рис. 2.4.

2.12) на $U_1 \cap V_1$ и на $U_2 \cap V_2$ можно согласовать так, чтобы получившиеся функции замены координат для M оказались гладкими.

§ 3. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

3.1. Определение

При изучении гладких многообразий понятие подпространства является слишком общим. Хотелось бы, чтобы для двух многообразий, одно из которых содержится в другом, их локальные системы координат были связаны друг с другом каким-то простым образом. Вот соответствующее определение.

[1]) См. также Милнор [24*, теорема 1.4].

Определение 3.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности m, и пусть N — подмножество в M, для которого выполнены следующие условия:

1) N — гладкое многообразие[1]) размерности n.

2) Если p — точка в N, то существует такая координатная окрестность U точки p в M с такой локальной системой координат φ: $U \to V$, где V — открытая клетка в m-мерном евклидовом пространстве, что $\varphi(N \cap U)$ есть подмножество точек клетки V, удовлетворяющих уравнениям $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots \ldots = x_m = 0$, а ограничение отображения φ на $U \cap N$ дает локальную систему координат для N в окрестности точки p. Тогда N называется *подмногообразием многообразия* M.

Условие 2) можно выразить менее формально, сказав, что локальные координаты на M в окрестности точки p определены так, что N имеет локальные уравнения $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$, в то время как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются локальными координатами на N в окрестности точки p. Таким образом, локальные системы координат на N получаются из систем координат на M. Условие 2) также обеспечивает, что у N имеется окрестность в M, устроенная вроде «трубчатой» окрестности у гладкой кривой в трехмерном пространстве. Этот момент мы обсудим позднее, а сначала дадим несколько примеров.

Примеры. 3.1. Простейший пример получится, конечно, если взять в качестве M m-мерное евклидово пространство, а в качестве N — евклидово подпространство, заданное уравнениями $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots \ldots = x_m = 0$.

3.2. Возьмем в качестве M трехмерное евклидово пространство. Координаты x, y, z в трехмерном пространстве можно принять за локальные координаты в окрестности любой точки. В качестве N возьмем двумерную сферу с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Мы уже видели, что она является гладким многообразием (пример 2.6). Теперь мы покажем, что выполняется

[1]) То есть оно снабжено соответствующими U_i и φ_i. — *Прим. ред.*

условие 2) определения 3.1 [1]). Возьмем, например, точку p на полусфере $z > 0$ в N. Ясно, что координаты (x, y, z) нельзя принять за локальные координаты

[1]) Полезно иметь в виду, что в определении 3.1 главную роль играет условие 2), и в сущности только его выполнение и нужно проверять, когда мы хотим убедиться в том или ином примере, что имеем дело с подмногообразием. Так как Уоллес в дальнейшем фактически пользуется этим обстоятельством, то остановимся на нем подробнее.

Пусть подмножество $N \subset M$ обладает следующим свойством:

3.1′. Для любой точки $p \in N$ существует такая карта (U, φ) многообразия M, что $p \in U$ и $\varphi(N \cap U)$ состоит из тех и только тех точек клетки $V = \varphi(U)$, для которых $x_{n+1} = \ldots = x_m = 0$.

Тогда можно ввести на N гладкую структуру, приняв всевозможные $U \cap N$ за координатные окрестности, а ограничения $\varphi | U \cap N$ — за локальные системы координат; будучи снабжено этой гладкостью, N будет подмногообразием многообразия M в смысле определения 3.1.

Проверим, что мы действительно получаем атлас для N. Если (U, φ) и (U', φ') — две такие карты на M, как в 3.1′, и $(U \cap N) \cap (U' \cap N) \neq \varnothing$, то мы должны проверить согласованность (в том смысле, как в прим. ред. на стр. 44) двух карт

$$(U \cap N, \varphi | U \cap N) \quad \text{и} \quad (U' \cap N, \varphi' | U' \cap N).$$

Эта согласованность означает, что функции

$$\varphi'\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad \varphi(\varphi')^{-1}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

являются гладкими функциями от $(x_1, \ldots, x_n)$ при всех тех $(x_1, \ldots, x_n)$, при которых они определены. Но это очевидно, ибо $\varphi'\varphi^{-1}$ и $\varphi(\varphi')^{-1}$ гладко зависят от своих аргументов ввиду согласованности карт (U, φ) и (U', φ') многообразия M.

Остаются еще две несущественные детали. Во-первых, Уоллес упорно требует, чтобы координатные окрестности были гомеоморфны открытым шарам. Ясно, что мы достигли бы этого, если бы включили в 3.1′ дополнительное условие:

$$V \cap \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\} \text{ — клетка в евклидовом пространстве } (x_1, \ldots, x_n).$$

Но лучше никаких дополнительных условий не включать, а проверить, что при выполнении 3.1′ для любой точки $p \in N$ найдется такая карта (U_1, φ), что $p \in U_1$, $\varphi_1(U_1)$ — клетка,

$$\varphi(N \cap U_1) = \varphi(U_1) \cap \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\},$$

и это последнее множество — клетка. Такую карту можно получить, взяв сначала такую карту (U, φ), как в 3.1′, и при необходимости уменьшив U; детали предоставляются читателю.

Во-вторых, в определении 2.5 требовалось, чтобы существовал атлас, состоящий из *счетного* числа карт. У нас же пока каждой точки p в M так, чтобы выполнялось условие 2). Тем не менее можно ввести новые координаты посредством преобразования

$$X = x,$$
$$Y = y,$$
$$Z = z - (1 - x^2 - y^2)^{1/2}.$$

Функции, стоящие справа, — гладкие, так же как и функции, которыми выражается обратное преобразование, и якобиан $\left|\frac{\partial (X, Y, Z)}{\partial (x, y, z)}\right|$ отличен от нуля в окрестности любой точки на полусфере $z > 0$. Таким образом, (X, Y, Z) допускаются в качестве локальных координат в окрестности точки p (определение 2.7). В этих координатах N имеет уравнение $Z = 0$ в окрестности точки p. Кроме того, в примере 2.6 мы видели, что X и Y можно принять за локальные координаты на N в полусфере $z > 0$. Таким образом, условие 2) определения 3.1 в окрестности точки p выполняется. Аналогичное рассуждение показывает, что это условие выполняется в окрестности любой точки $p \in N$.

В этом примере важным моментом является иллюстрация следующего обстоятельства: в данной системе локальных координат может быть совсем неочевидно, что подмножество в гладком многообразии на самом деле является подмногообразием. Необходимо произвести некоторую подгонку локальных координат, прежде чем мы увидим, что условие 2) выполняется.

точке $p \in N$ сопоставлена некоторая карта (U, φ) многообразия M, а из нее получается карта $(U \cap N, \varphi | U \cap N)$ для N; вполне может оказаться, что различным p сопоставлены различные (U, φ), и различных $(U \cap N, \varphi | U \cap N)$ получится столько же, сколько и различных точек p, т. е. континуум. Мы должны, следовательно, из покрытия топологического пространства N его открытыми подмножествами $U \cap N$ выбрать счетное подпокрытие.

Основным для дальнейшего является тот случай, когда N — компактное множество в M. В этом случае можно выбрать не только счетное, но и конечное подпокрытие. В общем же случае см. прим. ред. на стр. 39 и разд. 1.7. — *Прим. ред.*

3.3. Возьмем в качестве M двумерную сферу $x^2+y^2+z^2=1$ в трехмерном пространстве, и пусть N — окружность, по которой эта сфера пересекает плоскость $z=0$. Так как z всегда можно взять за одну из локальных координат на сфере в окрестности любой точки из N, беря за другую координату либо x, либо y, то легко видеть, что N — подмногообразие в M. Ясно, что этот пример можно распространить на бóльшие размерности.

3.4. Интересно рассмотреть пример, в котором условие 2) определения 3.1 не выполнено. В упражнении 2.22 был дан пример гладкого отображения φ плоскости E_2 на тор. Пусть L — прямая в E_2, проходящая через начало координат и имеющая иррациональный наклон. Тогда легко видеть, что φ отображает L в тор взаимно однозначно. Возьмем за M тор, а за N — множество $\varphi(L)$; прямая L есть одномерное евклидово пространство и, стало быть, многообразие. Тем не менее его образ $\varphi(L)$ бесконечное число раз «обвивает» тор M, и эта обмотка такова, что если $p \in N$ и U — любая окрестность точки p в M, то $U \cap N$ состоит из бесконечного числа непересекающихся отрезков. Поэтому ни при каком выборе локальных координат на M в окрестности точки p не может выполняться условие 2) определения 3.1. Таким образом, N не является подмногообразием в M [1]).

---

[1]) N называется *иррациональной обмоткой тора*. Стоит заметить, что в дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений бывает желательно называть подмногообразиями объекты, подобные N, поэтому часто дается более общее определение гладкого подмногообразия, учитывающее это пожелание ([38], стр. 51). Для целей настоящей книги в таком обобщении нет необходимости.

Вот еще один пример, когда условие 2) определения 3.1 не выполнено. В треугольнике Δ (имеется в виду замкнутая ломаная из трех звеньев, а не ограничиваемая ею часть плоскости) можно ввести гладкую структуру, ибо он гомеоморфен окружности S^1. (Действительно, если $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — атлас для S^1, а $\psi: \Delta \to S^1$ — гомеоморфизм, то $\{(\psi^{-1}(U_i), \varphi_i\psi)\}$ — атлас для Δ.) Но гладким подмногообразием плоскости треугольник, конечно, не является: если точка p находится в углу треугольника и U — ее окрестность на плоскости, то ни при каком диффеоморфизме

3.2. Многообразия в евклидовом пространстве

Нам особенно интересен случай, когда объемлющее многообразие есть евклидово пространство. Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n, заданное как подмногообразие в N-мерном евклидовом пространстве E. В формулировке условия 2) определения 3.1 используется некоторая локальная система координат в окрестности точки p. С другой стороны, евклидовы координаты $x_1, \ldots, x_N$ сами могут быть приняты за локальные координаты в окрестности точки p в E, поэтому естественно спросить, во что превращается условие 2) определения 3.1, если его выразить в терминах евклидовых координат. Мы исследуем этот вопрос, делая необходимое преобразование координат в два шага. Результат будет сформулирован как теорема 3.1.

Начнем с локальной системы координат в окрестности точки p в M, для которой выполнено условие 2) определения 3.1. Эта система представляет собой гомеоморфизм φ: $U \to V$, где V — открытая клетка в другом N-мерном евклидовом пространстве E', с координатами $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Из условия 2), в частности, следует, что ограничение φ на $U \cap M$ есть локальная система координат на M в окрестности точки p и что φ переводит это множество в часть клетки V, выделяемую уравнениями $y_{n+1} = y_{n+2} = \ldots$ $\ldots = y_N = 0$. С другой стороны, евклидовы координаты $x_1, \ldots, x_N$ в E годятся, в частности, и в U, поэтому отображение φ^{-1} можно записать формулами:

$$x_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_N), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

где ψ_i — гладкие функции, а якобиан

$$\left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_N)} \right|$$

не обращается в нуль на V.

φ: $U \to R^2 = \{(x_1, x_2)\}$ множество $\Delta \cap U$ не может отображаться в прямую $x_2 = 0$. (В отличие от иррациональной обмотки тора треугольник не является гладким подмногообразием плоскости и в упомянутом выше более широком смысле.) — *Прим. ред.*

В частности, этот якобиан не равен нулю в точке $\varphi(p)$, и поэтому, после подходящей перенумеровки переменных x_i, определитель

$$\left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right|$$

будет отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Поэтому, если определить отображение θ окрестности точки $\varphi(p)$ в третье евклидово пространство E'' с координатами $z_1, z_2, \ldots, z_N$ посредством формул

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} z_1 & = \psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_N), \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ z_n & = \psi_n(y_1, y_2, \ldots, y_N), \\ z_{n+1} & = y_{n+1}, \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ z_N & = y_N, \end{array}$$

то якобиан функций в правой части будет отличным от нуля в точке $\varphi(p)$, а стало быть, и в некоторой ее окрестности. По теореме 2.1 отсюда следует, что θ гомеоморфно отображает некоторую окрестность V' точки $\varphi(p)$ на открытую клетку W в пространстве E'', причем отображение θ^{-1}, определенное на W, будет гладким.

Положим теперь $U' = \varphi^{-1}(V')$ и $\chi = \theta\varphi$. Тогда χ есть гомеоморфизм множества U' на W, который с учетом формул (1) и (2) для φ^{-1} и θ должен записываться в следующем виде:

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} z_1 & = x_1, \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ z_n & = x_n, \\ z_{n+1} & = \chi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_N), \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ z_N & = \chi_N(x_1, x_2, \ldots, x_N). \end{array}$$

Так как χ есть композиция отображений θ и φ, функции в правой части имеют якобиан, отличный от нуля в U' (см. упражнение 2.3), так что χ тоже является локальной системой координат. Обратное отображение χ^{-1} записывается формулами вида

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_1,\\
&\vdots\\
x_n &= z_n,\\
x_{n+1} &= \lambda_{n+1}(z_1, z_2, \ldots, z_N),\\
&\vdots\\
x_N &= \lambda_N(z_1, z_2, \ldots, z_N).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Теперь мы пришли к следующему. Во-первых, $\chi(U' \cap M)$ есть в точности множество, выделяемое в W уравнениями $z_{n+1} = z_{n+2} = \ldots = z_N = 0$, поэтому из формул (4) следует, что $U' \cap M$ есть множество точек в U', удовлетворяющих уравнениям

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \lambda_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
x_N &= \lambda_N(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Во-вторых, ограничение отображения φ на $U' \cap M$ дает локальную систему координат на M в окрестности $U' \cap M$. Но легко видеть, что отображение χ переводит точку $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ из $U' \cap M$ в точку $(z_1, z_2, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots, 0)$, у которой $x_i = z_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, отображение проектирования множества $U' \cap M$ в подпространство $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ само является локальной системой координат на $U' \cap M$.

Итоги наших обсуждений подводятся в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть M есть n-мерное подмногообразие N-мерного евклидова пространства E, и пусть p — точка на M. Тогда при подходящей нумерации* *евклидовых координат* $x_1, x_2, \ldots, x_N$ *в* E *проекция на пространство* $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ *является локальной системой координат на* M *в окрестности точки* p, *причем* M *в этой окрестности есть множество точек, удовлетворяющих уравнениям (полученным из* (5) *переменой обозначений)*

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
&\vdots \\
x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

в которых f_i *— гладкие функции.*

Пример 3.5. В случае сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве мы видели, что в окрестности любой точки две из трех координат x, y, z можно принять за локальные координаты, так что соответствующие проектирования будут отображениями, определяющими локальные системы координат, а третья координата выражается как гладкая функция от этих двух (см. пример 2.6).

Упражнения. 3.1. Докажите следующее обращение теоремы 3.1. Пусть E есть N-мерное евклидово пространство, и пусть M — такое подмножество в E, что каждая точка $p \in E$ имеет окрестность U, для которой пересечение $U \cap M$ либо пусто, либо является множеством точек в U, удовлетворяющих уравнениям, которые при подходящей нумерации координат можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
&\vdots \\
x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

где f_i — гладкие функции. Докажите, что в этом случае M является подмногообразием в пространстве E.

3.2. Обобщите упражнение 3.1 следующим образом. Сохраняя в предыдущем упражнении остальные условия неизменными, предположим, что каждая точка пространства E имеет такую окрестность U, что $U \cap M$ либо пусто, либо является множеством точек в U, удовлетворяющих уравнениям

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где g_i — гладкие функции, матрица Якоби которых по переменным x_j имеет ранг n в каждой точке из U. Докажите, что M является подмногообразием в E.

В двух последних упражнениях описаны ситуации, в которых подмножество M в N-мерном евклидовом пространстве оказывается подмногообразием. Сейчас мы разберем еще одну такую ситуацию. Проверка условия 2) определения 3.1 будет уже немного труднее. Ее идея состоит в том, чтобы взять в качестве подмножества E образ гладкого многообразия при гладком взаимно однозначном отображении.

В примере 3.4 мы видели, что такой образ, вообще говоря, не обязан быть подмногообразием. Однако сейчас мы покажем, что компактности вместе с условием на ранг отображения [1]) уже достаточно для того, чтобы образ являлся подмногообразием в E.

Теорема 3.2. *Пусть M — компактное гладкое многообразие размерности n, и пусть E есть N-мерное евклидово пространство. Пусть f: $M \to E$ — взаимно однозначное гладкое отображение многообразия M в пространство E, и пусть ранг f равен n в каждой точке M. Тогда $f(M)$ — подмногообразие в E.*

Доказательство. Применим к отображению f результат упражнения 2.28 и получим, что для каждой точки $p \in M$ существует такая координатная окрестность $U \ni p$ с локальной системой координат φ, отображающей U на открытую клетку V в n-мерном евклидовом пространстве с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, в которой отображение $f\varphi^{-1}$ задается

[1]) Условие на ранг также является существенным: легко построить гладкое взаимно однозначное отображение окружности в плоскость, при котором ее образом будет треугольник. В точках окружности, отображающихся в вершины треугольника, ранг падает до нуля. — *Прим. ред.*

формулами

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1,\\
&\vdots\\
x_n &= y_n,\\
x_{n+1} &= f_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\vdots\\
x_N &= f_N(y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты в E, а f_i — гладкие функции.

Заметим, что первые n формул отождествляют V с открытой клеткой W в подпространстве $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ пространства E. Поэтому образ $f(U)$ есть множество точек, удовлетворяющих уравнениям

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\vdots\\
x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned} \tag{8}
$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$, а f_i — гладкие функции.

Теперь, чтобы завершить доказательство, надо убедиться в том, что точка $f(p)$ имеет окрестность, в которой уравнениям (8) удовлетворяют только точки $f(M)$. Для этого рассмотрим меньшую окрестность U' точки p, такую, что $\bar{U}' \subset U$, и положим $V' = \varphi(U')$; пусть, далее, W' — соответствующее подмножество из W. Для любого положительного ε множество $W'(\varepsilon)$, определенное неравенствами

$$f_{n+i}(x_1, \ldots, x_n) - \varepsilon < x_{n+i} < f_{n+i}(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon,$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \in W',$$

является открытой окрестностью точки $f(p)$. Теперь следует показать, что если ε достаточно мало, то в $W'(\varepsilon)$ лежат только те точки из $f(M)$, которые удовлетворяют уравнениям (8) с $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W'$. С первого взгляда использование двух окрестностей U и U' может показаться ненужным усложнением;

однако на самом деле удобно, работая с U', знать, что уравнения (8) справедливы в бо́льшем множестве U.

Допустим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда для заданной убывающей последовательности значений ε мы смогли бы выбрать последовательность точек в M, не лежащих в U', каждая из которых отображалась бы в соответствующее множество $W'(\varepsilon)$. Так как M компактно, из этой последовательности можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, перенумеровав члены подпоследовательности и соответствующие значения ε, мы получили бы такую последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, сходящуюся к нулю, и такую последовательность точек $q_1, q_2, \ldots$, сходящуюся к точке q, что все q_i лежат вне U', но $f(q_i) \in W'(\varepsilon_i)$ при каждом i. На самом деле все точки q_i должны лежать даже вне множества U. Действительно, ни одна точка множества $f(U \setminus U')$ не попадет в $W'(\varepsilon)$ ни для какого ε, потому что все такие точки удовлетворяют уравнениям (8) с $(x_1, \ldots, x_n) \notin W'$. Отсюда следует, что и предельная точка q лежит вне U. Но в силу непрерывности отображения f имеем $f(\lim q_i) = \lim f(q_i)$ и так как ε_i стремится к нулю, $\lim f(q_i)$ лежит в $\overline{f(U')} = f(\overline{U'})$. Иными словами, $f(q)$ лежит в $f(\overline{U'})$. Но так как f взаимно однозначно, это означает, что q лежит в $\overline{U'}$; таким образом, мы пришли к противоречию.

Отсюда следует, что при некотором ε окрестность $W'(\varepsilon)$ точки $f(p)$ удовлетворяет[1]) условию 2) определения 3.1. Такую окрестность можно найти для любой точки из $f(M)$. Поэтому наша теорема полностью доказана[2]).

[1]) Вместе с введенными в ней локальными координатами

$$z_1 = x_1, \ldots, z_n = x_n,$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_N = x_N - f_N(x_1, \ldots, x_n).$$

— *Прим. ред.*

[2]) Читателю предоставляется самостоятельно доказать, что в теореме 3.2 f диффеоморфно отображает M на $f(M)$, т. е. f является вложением (см. начало следующего раздела) многообразия M в евклидово пространство E. — *Прим. ред.*

3.3. Теорема о вложении

В предыдущем разделе мы рассматривали гладкие многообразия, которые являются подмногообразиями некоторого евклидова пространства. В действительности мы не налагали при этом существенных ограничений, так как любое гладкое многообразие диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства. Здесь мы докажем это только для компактных многообразий; для случая некомпактных многообразий доказать этот факт уже труднее [1]).

Уточним сначала терминологию. Когда говорят о вложении множества A в множество B, то это означает, что A является подмножеством B и что рассматривается отображение $A \to B$, сопоставляющее точке $a \in A$ ту же самую точку, рассматриваемую уже как точка в B. Но применительно к гладким многообразиям этот термин имеет несколько иной смысл.

Определение 3.2. Пусть M, N — гладкие многообразия. (*Гладким*) *вложением* M *в* N называется любое отображение f: $M \to N$, образ $f(M)$ которого является гладким подмногообразием в N и которое является диффеоморфизмом многообразия M на $f(M)$.

Если гладкое многообразие M вложено как подмногообразие в евклидово пространство E, то каждую координату x_i пространства E можно рассматривать как гладкую функцию на многообразии M. Поэтому для доказательства того, что многообразие можно вложить в евклидово пространство, естественно попытаться построить набор гладких функций $f_1, f_2, \ldots f_N$ и потом рассмотреть отображение многообразия M в пространство E, переводящее точку $p \in M$ в точку с координатами $(f_1(p), f_2(p), \ldots, f_N(p))$. Если мы хотим, чтобы это отображение было взаимно однозначным, то наш набор функций

[1]) См. [30], стр. 32, теорема 5, или [38], стр. 73, теорема 44. Между прочим, наложенное в определении 2.5 условие счетности необходимо для существования вложения в евклидово пространство. — *Прим. ред.*

должен обладать тем свойством, что для любых двух точек $p \neq q$ найдется по крайней мере одна функция f_i, принимающая различные значения в этих точках. В таком случае говорят, что функции f_i *разделяют точки* M. В любой координатной окрестности на M локальные координаты, очевидно, разделяют точки этой окрестности. Наша ближайшая цель теперь состоит в том, чтобы продолжить локальные координаты, заданные пока что в координатных окрестностях, до гладких функций на всем многообразии, с тем чтобы продолженные функции разделяли точки уже на всем многообразии.

Для компактного многообразия M это можно сделать с помощью функций, которые строятся в упражнении 2.13. Итак, построим для каждой точки $p \in M$ окрестность U, лежащую внутри координатной окрестности, и гладкую функцию f на M, которая положительна на U и равна нулю вне U. Так как многообразие M компактно, его можно покрыть конечным множеством $U_1, U_2, \ldots, U_m$ подобных окрестностей, причем каждой U_i соответствует функция f_i. Любое из множеств U_i само, конечно, является координатной окрестностью и имеет координатное отображение φ_i на открытую клетку V_i. Если $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ — координаты точки клетки V_i, рассматриваемые как гладкие функции на множестве U_i, то функции[1]) $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ являются гладкими

---

[1]) Если быть педантичными, то следовало бы сказать: $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ в U_i и $y_j^{(i)} = 0$ на $M \setminus U_i$ (ведь $x_j^{(i)}$ не определены вне U_i, так что выражение $x_j^{(i)} \cdot f_i$ вне U_i, строго говоря, тоже не имеет смысла). Но подобного педантизма никогда не проявляют.

Следующее замечание чуть-чуть существеннее. Коль скоро мы хотим, чтобы функция $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ была гладкой функцией на всем M, недостаточно, чтобы функция $x_j^{(i)}$ была гладкой на U_i, а f_i была гладкой на всем M и тождественно равнялась нулю вне U_i. Для гладкости (даже для непрерывности) $y_j^{(i)}$ в точках границы $\mathrm{Fr}\, U_i$ нужно, чтобы $x_j^{(i)}$, так сказать, «хорошо себя вела» возле $\mathrm{Fr}\, U_i$. Проще всего потребовать, чтобы $x_j^{(i)}$ была гладкой функцией не только в U_i, но и в чуть бо́льшем открытом мнофункциями на всем многообразии M. Рассмотрим теперь набор функций

$$(9) \qquad f_1,\ y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(1)},\ f_2,\ y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\ \ldots,\ y_n^{(2)},\ f_3,\ \ldots \\ \ldots,\ f_m,\ y_1^{(m)},\ \ldots,\ y_n^{(m)}.$$

Мы проверим, что это множество функций разделяет точки M.

Возьмем две точки p и q на M. Если, например, p попадает в U_i, а q — нет, то функция f_i равна нулю в точке q и отлична от нуля в точке p. Поэтому функция f_i разделяет точки p и q. Предположим теперь, что точки p и q попали в одно множество U_i. Если $f_i(p) \neq f_i(q)$, то функция f_i разделяет точки p и q. Если же $f_i(p) = f_i(q)$, то, поскольку одна из локальных координат $x_j^{(i)}$ обязательно разделяет p и q, соответствующая ей функция $y_j^{(i)} = f_i \cdot x_j^{(i)}$ тоже разделит эти точки.

Следуя плану, приведенному в начале этого раздела, мы должны были бы теперь использовать функции (9) для того, чтобы построить отображение многообразия M в евклидово пространство. Однако при этом может оказаться, что ранг полученного отображения не будет равен n во всех точках. Чтобы обеспечить выполнение этого условия (и сделать возможным применение теоремы 3.2), необходимо добавить к набору (9) новые функции. Для этого обозначим через $z_j^{(i)}$ функцию, равную $x_j^{(i)} \cdot f_i^2$ на U_i и нулю вне U_i.

жестве $U_i' \supset \overline{U}_i$. А чтобы обеспечить выполнение этого требования, немного уточним выбор U_i. Для каждой точки $p \in M$ имеется окрестность U_p, замыкание которой лежит внутри некоторой координатной окрестности, а в терминах соответствующих координат φ отвечает некоторому шару евклидова пространства с центром в $\varphi(p)$. Так как M компактно, из покрытия $\{U_p\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_m$. Каждое $\overline{U}_i$ лежит в некоторой координатной окрестности U_i', и соответствующие координаты $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ являются гладкими функциями в последней, чего мы и добивались. Подобные уточнения тоже часто подразумеваются, но в явном виде не высказываются. — *Прим. ред.*

Таким образом, $z_j^{(i)} = y_j^{(i)} \cdot f_i$. Рассмотрим набор, полученный добавлением к набору (9) функций $z_j^{(i)}$ (всего, таким образом, будет $2mn + n$ функций). Обозначим эти функции через $F_1, \ldots, F_N$, $N = 2mn + n$, и рассмотрим отображение $F: M \to E$, переводящее точку p в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p))$. Так как набор F_i включает в себя функции (9), разделяющие точки многообразия M, то отображение F будет взаимно однозначным. Теперь проверим, что оно имеет ранг n в каждой точке. Для этого покажем, что в каждой точке множества U_i хотя бы один из якобианов

$$\left| \frac{\partial\left(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}\right)}{\partial\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)} \right|, \quad \left| \frac{\partial\left(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)}\right)}{\partial\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)} \right|$$

отличен от нуля.

Вспоминая, что каждая функция f_i задается на множестве U_i явной формулой $f_i = \exp(r_i^2 - 1)^{-1}$, где $r_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(i)})^2$, можно путем непосредственных вычислений показать [1]), что первый якобиан обращается в нуль только тогда, когда $r_i^4 - 4r_i^2 + 1 = 0$, а второй — только в случае, когда $r_i^4 - 6r_i^2 + 1 = 0$. Ясно, что ни в одной точке оба эти уравнения одновремен-

---

[1]) Используя, что для производной $f'(t)$ функции $f(t) = \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)$ выполняется равенство $f'(t) = -\frac{1}{(t-1)^2} f(t)$, легко найти, что интересующие нас якобианы равны

$$f_i^n \det\left(\delta_j^k - \frac{2x_j^{(i)} x_k^{(i)}}{(r_i^2 - 1)^2}\right), \quad f_i^{2n} \det\left(\delta_j^k - \frac{4x_j^{(i)} x_k^{(i)}}{(r_i^2 - 1)^2}\right),$$

где $\delta_j^k = 1$ при $j = k$ и $\delta_j^k = 0$ при $j \neq k$, а $\det(a_{jk})$, естественно, обозначает определитель матрицы n-го порядка с элементами a_{jk}. Далее надо использовать тот факт, что $f_i > 0$ в U_i и что, как нетрудно проверить,

$$\det\left(\delta_j^k - a_j a_k\right) = (-1)^n \left(1 - a_1^2 - \ldots - a_n^2\right).$$

— *Прим. ред.*

но быть справедливыми не могут. Поэтому отображение F имеет ранг n во всех точках U_i для каждого i, а значит, и всюду на M.

Теперь, применяя теорему 3.2, мы можем объединить все сказанное в этом разделе в виде следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Если M — компактное гладкое многообразие, то существует вложение F: $M \to E$, где E — евклидово пространство, такое, что $F(M)$ является подмногообразием в E.*

3.4. Вложение многообразия с краем

Чтобы охватить случай многообразий с краем, нужно внести небольшие изменения в предыдущие определения и теоремы. Например, если N — многообразие с краем, то условие 2) определения 3.1 в том виде, как оно там сформулировано, относится только к внутренним точкам N. Если точка p принадлежит краю многообразия N, то соответствующее условие состоит в том, что она имеет координатную окрестность U в M с такой локальной системой координат φ: $U \to V$, что $\varphi(N \cap U)$ является подмножеством множества V, которое выделяется условиями $x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$. Образ края многообразия N в U будет выделяться дополнительным условием $x_n = 0$.

Если оба многообразия M и N имеют края и мы хотим определить, что означает выражение «N — подмногообразие в M», то необходима дальнейшая корректировка, учитывающая возможные соотношения между краями.

Доказательство теоремы о вложении из предыдущего параграфа, проведенное с совсем небольшими изменениями, показывает, что если M — многообразие с краем, то существует вложение f: $M \to E$ в евклидово пространство E. Подробное доказательство этого следует провести в качестве упражнения.

Существует некоторое усиление теоремы о вложении многообразия с краем в евклидово пространство, которое нам понадобится в дальнейшем. Мы будем иметь дело с таким вложением, при котором край вкладывается в линейное подпространство. Сейчас мы построим такое вложение.

Пусть M — компактное многообразие с краем M_1, и пусть f: $M \to E$ — его вложение в N-мерное пространство. Пусть отображение f переводит точку $p \in M$ в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p))$. Предположим, что можно построить такую гладкую функцию F_{N+1} на M, которая положительна на $M \setminus M_1$ и равна нулю на M_1. Тогда отображение f', переводящее точку $p \in M$ в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p), F_{N+1}(p))$, является гладким отображением многообразия M в $N+1$-мерное евклидово пространство, которое взаимно однозначно отображает M на $f'(M)$, причем $f'(M)$ есть подмногообразие в E'. Кроме того, $f'(M)$ лежит в множестве точек, удовлетворяющих неравенству $x_{N+1} \geqslant 0$, образ края M_1 лежит в множестве $x_{N+1} = 0$, а образ множества $M \setminus M_1$ — в множестве $x_{N+1} > 0$.

Чтобы построить функцию F_{N+1}, построим сначала покрытие многообразия M окрестностями U_i, каждая из которых (так же, как в доказательстве теоремы 3.3) снабжена функцией f_i, положительной на U_i и равной нулю вне U_i. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_k$ — те координатные окрестности, для которых соответствующие локальные системы координат отображают их на полуклетки $V_1, V_2, \ldots, V_k$; иначе говоря, это окрестности, пересекающие край многообразия M. Если $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ — координаты на V_i, то для одной из них, скажем для $x_n^{(i)}$, выполняется неравенство $x_n^{(i)} \geqslant 0$ на образе окрестности U_i, а образ множества $M_1 \cap U_i$ выделяется уравнением $x_n^{(i)} = 0$. Функции $x_n^{(i)} \cdot f_i$ для каждого i являются гладкими функциями на M; отсюда функция $\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)} \cdot f_i$ есть гладкая функция на M. Так как все функции $x_n^{(i)} \cdot f_i$ неотрицательны, то $\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)} \cdot f_i$ равна нулю только когда все $x_n^{(i)} \cdot f_i$ равны нулю. Для точки из множества U_i это означает, что $x_n^{(i)}=0$, т. е. что точка лежит в M_1. Теперь положим

$$F_{N+1}=\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)}\cdot f_i+\sum_{i>k} f_i,$$

где вторая сумма берется по тем i, для которых окрестность U_i не пересекает M_i. Здесь опять все члены неотрицательны, и легко видеть, что функция F_{N+1} неотрицательна всюду на M и равна нулю только в точках множества M_1.

Теперь, действуя описанным выше способом, мы добавляем F_{N+1} к функциям, задающим вложение многообразия, и получаем следующую теорему:

Теорема 3.4. *Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем M_1. Тогда существует такое гладкое вложение $f\colon M\to E_{N+1}$ многообразия M в $N+1$-мерное евклидово пространство, что $f(M)$ есть подмногообразие, лежащее в множестве всех элементов x, для которых $x_{N+1}\geqslant 0$, а $f(M_1)$ является пересечением $f(M)$ с множеством тех x, для которых $x_{N+1}=0$.*

Упражнения. 3.3. В предыдущих обозначениях проверьте, что $f(M_1)$ является подмногообразием в N-мерном евклидовом пространстве, определенном уравнением $x_{N+1}=0$.

3.4. Используя метод доказательства теоремы 3.4, покажите, что если M — гладкое многообразие, край которого является несвязным объединением $M_1\cup M_2$, то существует такое гладкое вложение $f\colon M\to E$ многообразия M в N-мерное евклидово пространство для некоторого N, что $f(M)$ есть подмногообразие, целиком заключенное между гиперплоскостями $x_N=0$ и $x_N=1$ и пересекающееся с этими гиперплоскостями по множествам $f(M_1)$ и $f(M_2)$ соответственно.

§ 4. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

4.1. Касательные прямые

Если C — кривая в N-мерном евклидовом пространстве, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,\ x_N=f_N(t),$$

где f_i — гладкие функции, то касательная прямая к C в точке, соответствующей значению параметра t_0, задается уравнениями [1])

$$\frac{x_1 - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{x_2 - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} = \ldots = \frac{x_N - f_N(t_0)}{f_N'(t_0)}.$$

Эти уравнения выражают геометрическую идею, согласно которой касательная является пределом секущих, соединяющих точки с параметрами t_1 и t_0, когда t_1 стремится к t_0.

Определение 4.1. Если M — гладкое многообразие, вложенное как подмногообразие в евклидово пространство E, а C — кривая, которая содержится в M и задана гладкими параметрическими уравнениями, то касательная прямая к C в точке p называется *касательной прямой к многообразию M в точке p.*

Пример 4.1. Пусть M — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве. Плоскости, проходящие через ось z, высекают на M окружности. Касательные ко всем этим окружностям в точке $(0, 0, 1)$ по определению 4.1 являются касательными прямыми к M. Заметим, что все они лежат в плоскости $z = 1$. Мы сразу же обобщим это замечание.

Лемма 4.1. *Пусть M — гладкое многообразие размерности n, являющееся подмногообразием N-мерного евклидова пространства E, и пусть p — точка на M. Тогда все касательные прямые к многообразию M в точке p содержатся в некотором n-мерном линейном подпространстве T пространства E.*

Доказательство. Используя теорему 3.1, предположим, что координаты пространства E зану-

[1]) Разумеется, здесь предполагается, что хотя бы одна из производных $f_i'(t_0) \neq 0$. Когда говорят о гладкой параметризации, то помимо гладкости соответствующих функций подразумевается выполнение и этого свойства для всех t_0. — *Прим. ред.*

мерованы так, что в окрестности точки p многообразие M является множеством точек, удовлетворяющих уравнениям вида

$$(1) \qquad x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = n+1, \ldots, N,$$

где φ_i — гладкие функции. Если кривая C имеет гладкие параметрические уравнения $x_i = f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и содержится в M, то

$$(2) \qquad f_i(t) = \varphi_i(f_1(t), \ldots, f_n(t)), \qquad i = n+1, \ldots, N.$$

Предположим, что C проходит через точку p и что p соответствует значению параметра t_0. Тогда дифференцирование уравнений (2) дает

$$(3) \qquad f_i'(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_p f_j'(t_0), \qquad i = n+1, \ldots, N.$$

Но из этих уравнений следует, что каждая касательная прямая к M в точке p лежит в линейном пространстве T, заданном уравнениями

$$(4) \qquad x_i - f_i(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - f_j(t_0)), \; i = n+1, \ldots, N.$$

Из вида этих уравнений мы можем заключить, что пространство T не зависит от выбора кривой C и имеет размерность n, что и требовалось.

Определение 4.2. Линейное пространство T, описанное в лемме 4.1, называется *касательным пространством к многообразию M в точке p.*

Следующее определение вводится для удобства терминологии.

Определение 4.3. Если M — гладкое подмногообразие в N-мерном евклидовом пространстве E, а T — касательное пространство к M в точке p, то любая гиперплоскость (линейное подпространство размерности $N - 1$) в пространстве E, содержащая T, называется *касательной гиперплоскостью к M в точке p.*

Заметим, что если M имеет размерность $N-1$, то T тоже имеет размерность $N-1$, и поэтому в точке p имеется единственная касательная гиперплоскость — само пространство T.

Упражнения. 4.1. Найдите касательное пространство к сфере $x^2+y^2+z^2=1$ в точке (x_0, y_0, z_0).

4.2. Пусть M — гладкое многообразие в евклидовом пространстве, и пусть T — касательное пространство к M в точке p. Пусть L — прямая, лежащая в T и проходящая через точку p. Постройте кривую C в M с гладкими параметрическими уравнениями, для которой L является касательной к C в точке p.

Заметим, что лемма 4.1 утверждает только, что пространство T содержит все касательные прямые к M, проходящие через точку p. Теперь же наше упражнение гарантирует, что все прямые в T, проходящие через точку p, являются касательными к многообразию M в точке p.

4.3. Пусть M — гладкое многообразие в евклидовом пространстве, и пусть V — подмногообразие в M. Докажите, что если T_M и T_V — касательные пространства в точке $p \in V$ к M и V соответственно, то $T_V \subset T_M$.

4.2. Критические точки

Здесь мы введем понятие, обобщающее понятие минимума и максимума функции. Если гладкая функция f одной переменной x имеет минимум или максимум [1]) в точке $x=x_0$, то $df/dx=0$ в этой точке. Аналогично если функция двух переменных $f(x, y)$ имеет максимум или минимум в точке (x_0, y_0), то $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ в этой точке. Последнее означает, что касательная плоскость к поверхности $z=f(x, y)$ (графику функции f в трехмерном пространстве) в точке (x_0, y_0) горизонтальна. То же самое условие, очевидно, выполняется для седловой точки — точки p, около которой функция устроена так, что, приближаясь к этой точке по одному пути, мы будем иметь в p_0 максимум (по сравнению со значениями в других точках этого пути), а приближаясь по другому пути — минимум; см. рис. 4.1. Для функций многих переменных в аналогичной ситуации имеется гораздо большее разнообразие возможностей.

---

[1]) Оговоримся сразу же, что максимумы и минимумы обычно подразумеваются локальными. — *Прим. ред.*

Теперь заметим, что поверхность с уравнением $z = f(x, y)$ можно считать частью гладкого многообразия M, на котором (x, y) образуют локальную систему координат в окрестности точки $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$; тогда f будет гладкой функцией на M, частные производные которой по локальным координатам обращаются в нуль в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Кроме того,

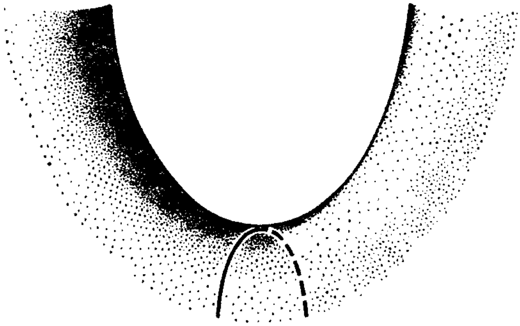


Рис. 4.1. Седловая точка.

геометрически наша ситуация соответствует вложению многообразия M в трехмерное пространство, при котором функция f отождествляется с одной из евклидовых координат, а именно с координатой z, причем горизонтальная плоскость $z = f(x_0, y_0)$ является касательной плоскостью к M в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Эти замечания подводят нас к более общей ситуации, которую мы сейчас и опишем.

Пусть M есть n-мерное гладкое многообразие, f — гладкая функция на M. Рассмотрим координатную окрестность U точки $p \in M$; пусть φ: $U \to V$ — соответствующая система локальных координат, отображающая U на открытую клетку V в n-мерном евклидовом пространстве. Значения первых частных производных функции $f\varphi^{-1}$ по координатам, имеющимся в V, в точке $\varphi(p)$ зависят, конечно, от выбора локальной системы координат и претерпевают линейное преобразование при замене этой системы. Однако если в данной системе координат все частные производные обращаются в нуль в точке $\varphi(p)$, то то же самое будет иметь место для любой другой системы координат.

Определение 4.4. Если в предыдущих обозначениях все частные производные функции $f\varphi^{-1}$ по координатам V обращаются в нуль в точке $\varphi(p)$, то мы будем называть p *критической точкой функции* f.

Только что сделанное замечание показывает, что определение 4.4 не зависит от выбора системы координат в окрестности точки p.

Упражнения. 4.4. Если M — плоскость, а f — гладкая функция на M, то все максимумы, минимумы и седловые точки этой функции являются критическими точками.

4.5. Если функция f — та же, что и вначале этого параграфа, но в качестве M теперь взят ее график — поверхность $z=f(x, y)$, — то все максимумы, минимумы и седловые точки на M являются критическими точками функции f, если рассматривать ее как функцию на этой поверхности.

Теперь мы дадим геометрическое описание критических точек с помощью касательных гиперплоскостей. Оно обобщает вводные замечания о поверхности в трехмерном пространстве, приведенные в начале этого раздела.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, а f — гладкая функция на M. По теореме 3.3 мы не теряем общности, считая, что M задано как подмногообразие в евклидовом пространстве E. Пусть размерность E равна $N-1$. Рассмотрим в N-мерном пространстве E' множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$, где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ есть точка из M, а $x_N = f(x)$. Обозначая это множество через M', легко видеть (используя упражнения 3.1), что M' — гладкое подмногообразие пространства E', которое на самом деле диффеоморфно M: диффеоморфизм устанавливает отображение, переводящее точку $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ в точку $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$. Мы добились того, что теперь у нас имеется гладкое подмногообразие M' в E', обладающее тем свойством, что заданная гладкая функция f отождествляется на нем с евклидовой координатой x_N.

Возьмем точку p' на M' с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0)$, и пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{N-1}^0)$ — соответствующая точка на M. Точка p имеет окрестность U в пространстве E, такую, что $M \cap U$ совпадает с множеством точек U, удовлетворяющих уравнениям, которые при подходящей нумерации координат принимают вид

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = n+1, \ldots, N-1, \tag{5}$$

где f_i — гладкие функции (см. теорему 3.1). Значит, в окрестности точки p' многообразие M' совпадает с множеством точек, удовлетворяющих уравнениям (5) и уравнению

$$x_N = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно использовать как локальные координаты на M или M' в окрестностях точек p или p' соответственно. Уравнения касательного пространства к M' в точке p' имеют вид

$$\tag{6} \begin{aligned} x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j^0), \quad i = n+1, \ldots, N-1, \\ x_N - x_N^0 &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j^0). \end{aligned}$$

Если теперь p — критическая точка функции f на многообразии M, или, что то же самое, p' — критическая точка функции f на M', то последнее из уравнений (6) принимает вид

$$x_N = x_N^0 = f(p). \tag{7}$$

Таким образом, (7) является уравнением касательной гиперплоскости к многообразию M' в точке p'. Обратно, если (7) задает касательную гиперплоскость к M' в точке p', то все коэффициенты правой части последнего из уравнений (6) равны нулю, так что p' — критическая точка функции f.

Все сказанное можно объединить в лемму (в которой мы сохранили предыдущие обозначения, избавившись только от штрихов):

Лемма 4.2. *Если M — гладкое многообразие, а f — гладкая функция на нем, то M можно вложить как подмногообразие в N-мерное пространство так, чтобы значение функции f в каждой точке было равно координате x_N этой точки, и тогда точка p будет критической для f в том и только том случае, когда гиперплоскость $x_N = f(p)$ является касательной гиперплоскостью к M в точке p.*

Конечно, возможен случай, когда функция f сначала не задана. Нам может быть просто дано подмногообразие M в N-мерном евклидовом пространстве. Тогда, если взять в качестве функции f координату x_N, то утверждение леммы 4.2 будет по-прежнему справедливым: критические точки f — это точки, в которых существует касательная гиперплоскость вида $x_N = \text{const}$.

Пример 4.2. Пусть M — тор, вложенный как подмногообразие в трехмерное евклидово пространство способом, описанным в разд. 2.1. Из рис. 4.2 легко усмотреть, что имеется ровно четыре горизонтальных плоскости (т. е. плоскости вида $z = \text{const}$): H_1, H_2, H_3, H_4, которые являются касательными плоскостями к многообразию M в точках P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно. Это соответствует тому факту, что функция z на торе M имеет четыре критических точки P_1, P_2, P_3, P_4.

Упражнение 4.6. Проверьте последнее утверждение (тот факт, что P_i являются критическими точками функции z), выразив z через локальные координаты в окрестностях этих точек.

Заметим, что в предыдущем примере критические точки функции z — это точки, в которых локальными координатами являются x и y, а z нельзя принять за одну из локальных координат ни в какой из этих точек. Но этого и следовало ожидать. Ведь для любой окрестности, в которой z является одной из локальных координат, $\partial z/\partial z = 1$, так что условие определения 4.4 критической точки выполнено быть не может.

С другой стороны, заметим, что P_1, P_2, P_3, P_4 — это единственные точки, в которых z нельзя принять за одну из локальных координат. Кроме того, если C — сечение тора горизонтальной плоскостью $z = c$, отличной от плоскостей H_1, H_2, H_3, H_4, то в окрестности любой из своих точек C является множеством

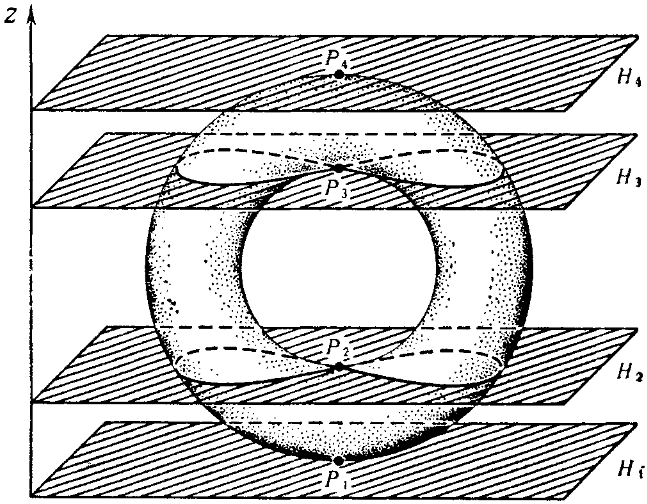


Рис. 4.2. Четыре критические точки функции z на торе.

точек, удовлетворяющих уравнению $z - c = 0$, в котором z, или $z - c$, — одна из локальных координат. Следовательно, C является подмногообразием тора.

Теперь мы сформулируем только что описанные свойства в общей ситуации — для произвольной гладкой функции на гладком многообразии.

Лемма 4.3. *Пусть M — гладкое многообразие размерности n, а f — гладкая функция на M. Пусть p — точка многообразия M, которая не является критической для функции f. Тогда существует такая локальная система координат φ: $U \to V$, где V — открытая* *n-мерная клетка с координатами* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что* $f\varphi^{-1} = x_1$. *Если же* p — *критическая точка функции* f, *то в ее окрестности локальной системы координат с указанным свойством не существует.*

Доказательство. Предположим, что p не является критической точкой функции f. Пусть $\varphi'\colon U' \to V'$ — локальная система координат в окрестности U' точки p. Обозначая через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ координаты в V', запишем $f\varphi'^{-1} = g(y_1, \ldots, y_n)$. Тогда, поскольку p не является критической точкой функции f, одна из частных производных, скажем $\partial g/\partial y_1$, будет отлична от нуля в точке $\varphi'(p)$. Но в этом случае функции, определенные равенствами

$$x_1 = g(y_1, \ldots, y_n),$$
$$x_i = y_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

имеют ненулевой якобиан относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$ в точке $\varphi'(p)$. Отсюда следует (см. определение 2.7), что существует такая локальная система координат $\varphi\colon U \to V$, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты в V и $f\varphi^{-1} = x_1$, что и требовалось.

Обратно, если существует система координат с указанным свойством, то $\partial(f\varphi^{-1})/\partial x_1 = 1$ в точке $\varphi(p)$, и потому p не является критической точкой функции f.

Следствие. *Пусть в обозначениях леммы* 4.3 M_c *есть множество точек, в которых функция* f *принимает значение* c. *Если* M_c *не содержит критических точек функции* f, *то оно является подмногообразием в* M. *Его размерность равна* $\dim M - 1$.

Доказательство. Возьмем точку $p \in M_c$. Так как p не является критической точкой функции f, по лемме 4.3 можно найти такую локальную систему координат $\varphi\colon U \to V$ в окрестности точки p, что $f\varphi^{-1} = x_1$. Поэтому множество $\varphi(M_c \cap U)$ есть множество точек из V, удовлетворяющих уравнению $x_1 - c = 0$. А так как $x_1 - c$ можно принять за одну из координат в V, условие (2) определения 3.1 выполнено. Тем самым M_c является подмногообразием размерности $\dim M - 1$.

По аналогии с леммой 4.2 последний результат можно сформулировать в терминах вложения многообразия M в евклидово пространство. На этом языке он будет означать, что каждое сечение M гиперплоскостью $x_N = \mathrm{const}$, не содержащее критических точек функции x_N, является подмногообразием размерности $\dim M - 1$ в M.

4.3. Невырожденные критические точки

Вернемся к примеру тора в трехмерном пространстве (пример 4.2). Если выразить функцию z в окрестности критической точки P_i на торе через координаты x и y, то это выражение будет иметь довольно специальный вид. Тор, который, как и ранее, заметается окружностью радиуса 1, лежащей на плоскости (x, y) и с центром в точке $(2, 0)$, при вращении этой плоскости вокруг оси y, задается в трехмерном пространстве уравнением

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16\,(x^2 + z^2).$$

Рассматривая это уравнение как квадратное относительно z^2, найдем из него z^2. Получим следующее выражение:

$$z^2 = 5 - x^2 - y^2 \pm 4\,(1 - y^2)^{1/2}. \tag{8}$$

Оно дает два значения для z^2 в зависимости от того, какой выбирается знак — плюс или минус. Для z, таким образом, получается четыре значения. Для небольших значений x и y они соответствуют локальным уравнениям тора M в окрестностях каждой из четырех точек P_i. Чтобы получить, например, локальное уравнение в окрестности точки P_3, возьмем в выражении (8) знак минус и разложим правую часть в степенной ряд.

Разложение имеет вид

$$z^2 = 1 + y^2 - x^2 + \frac{1}{2} y^4 + \ldots .$$

Затем, извлекая положительный квадратный корень и разлагая в степенной ряд, получаем

$$z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \ldots .$$

Здесь все последующие члены уже имеют степень, большую двух.

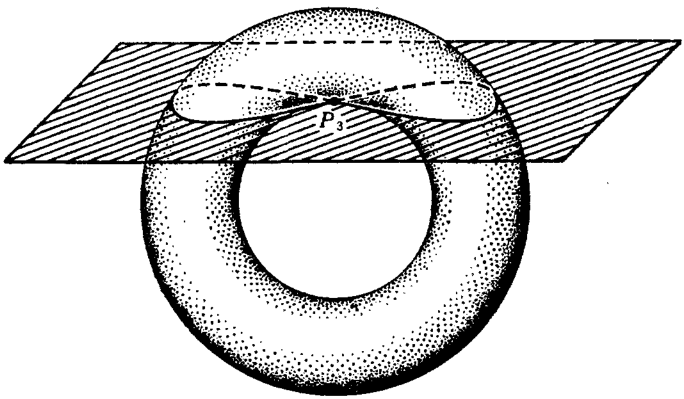


Рис. 4.3. Критический уровень функции z на торе. Первое приближение к функции z в точке P_3 равно $1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

Таким образом, первое приближение для уравнения многообразия M в окрестности точки P_3 получается отбрасыванием высших степеней переменных x и y. Оно имеет вид $z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$. Сечение поверхности с таким уравнением плоскостью $z = 1$ представляет собой пару прямых $y = \pm x$ — это две касательные в центре восьмерки, которую высекает на этой плоскости тор. Важно заметить, что в первом приближении $z - 1$ записывается как квадратичная форма от x и y, которая невырожденна, т. е.

ее определитель не равен нулю. Этот определитель есть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

где все производные берутся в точке P_3.

Проведенный разбор делает естественным следующее определение:

Определение 4.5. Пусть f — гладкая функция на n-мерном гладком многообразии M, и пусть p — критическая точка f. Пусть U — координатная окрестность точки p, а $\varphi\colon U \to V$ — локальная система координат. Введем $g = f\varphi^{-1}$ — функцию от координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в клетке V. Если определитель[1])

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

отличен от нуля в точке $\varphi(p)$, мы будем называть критическую точку p *невырожденной*. Заметим, что в этом случае ранг матрицы $(\partial^2 g/\partial x_i \partial x_j)$ равен размерности многообразия M.

Упражнения. 4.7. Проверьте, что определение 4.5 не зависит от выбора системы локальных координат в окрестности точки p.

4.8. Докажите, что в примере 4.2 P_1, P_2, P_3, P_4 являются невырожденными критическими точками функции z на торе.

4.9. Возьмем тор M из примера 4.2 и рассмотрим y как функцию на M. Проверьте, что плоскости $y = \pm 1$ являются касательными плоскостями к M, причем каждая из них касается многообразия M вдоль целой окружности. Тем самым все точки этих двух окружностей будут критическими точками для функции y. Покажите, что все эти точки являются вырожденными (т. е. не являются невырожденными).

4.10. Можно заметить, что в упражнении 4.9 вырожденные критические точки не являются изолированными. Однако это вовсе не обязательно для вырожденных точек. Рассмотрим, например, функцию $x^3 + y^3$ на плоскости. Покажите, что $(0, 0)$ — изолированная критическая точка, которая, однако, является вырожденной.

---

[1]) Он называется *гессианом* функции g. — *Прим. ред.*

4.11. Пусть f — гладкая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равная нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Заметим, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\, dt.$$

Выведите отсюда, что $f = \sum x_i f_i$, где f_i — гладкие функции, для которых $f_i(0, 0, \ldots, 0)$ равно значению $\partial f/\partial x_i$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Покажите, что если, кроме того, все $\partial f/\partial x_i$ обращаются в нуль, когда все x_i равны нулю, то $f = \sum x_i x_j f_{ij}$, где f_{ij} — гладкие функции, причем $f_{ij}(0, 0, \ldots, 0)$ равно значению $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Это упражнение означает, что для гладкой функции на многообразии f с критической точкой p и для локальной системы координат $\varphi: U \to V$ в окрестности точки p, у которой $\varphi(p)$ есть точка $(0, 0, \ldots, 0)$, функция $g = f\varphi^{-1}$ является квадратичной формой от координат x_i в V с переменными коэффициентами, которые в точке $\varphi(p)$ совпадают с $\partial^2 g/\partial x_i \partial x_j$. Дело, очевидно, упрощалось бы, если бы можно было построить локальную систему координат, в которой функция f выражалась бы квадратичной формой с постоянными коэффициентами. Следующее упражнение показывает, что это можно сделать, если критическая точка невырожденна.

4.12. Так же, как и в упражнении 4.11, пусть f — гладкая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем f и все $\partial f/\partial x_i$ равны нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Пусть начало координат является невырожденной критической точкой. Запишем $f = \sum x_i x_j f_{ij}$. Покажите, что существует преобразование переменных

$$y_i = \sum h_{ij}(x)\, x_j,$$

где h_{ij} — гладкие функции и $\det(h_{ij}(0)) \neq 0$, приводящее f к виду

$$f = \sum c_i y_i^2$$

с коэффициентами c_i, равными либо 1, либо -1.

(Начните с приведения $\sum f_{ij} x_i x_j$ к диагональному виду точно так же, как это делают для квадратичной формы с постоянными коэффициентами. Для этого занумеруйте x_i так, чтобы $f_{11}(0) \neq 0$, и исключите члены вида $x_1 x_i$, полагая

$$y_1 = \sqrt{|f_{11}|}\left(x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}} x_2 + \ldots + \frac{f_{1n}}{f_{11}} x_n\right).$$

Затем надо продолжать по индукции. Проверьте, что коэффициенты получившегося преобразования $y_i = \sum h_{ij}(x)\, x_j$ удовлетворяют требуемым условиям.)

Следующая теорема непосредственно вытекает из результатов приведенных выше упражнений:

Теорема 4.1. *Пусть f — гладкая функция на гладком многообразии M, и пусть p — невырожденная критическая точка функции f на M. Тогда в окрестности точки p существует такая локальная система координат φ: $U \to V$, что функция $f\varphi^{-1}$ выражается через координаты в V в виде $\sum c_i y_i^2$ с c_i, равными* 1 *или* —1. (*Подразумевается, что $\varphi(p)$ имеет координаты $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$* и что *$f(p) = 0$.*)

Доказательство. Возьмем произвольную систему локальных координат χ: $U' \to V'$ в окрестности точки p и предположим, что координаты x_1, x_2, $\ldots$, x_n в V' выбраны так, что $\chi(p)$ есть точка $(0, 0, \ldots, 0)$. Положим $f\chi^{-1} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и перейдем от переменных x_j к переменным y_i из упражнения 4.12. Якобианом функций y_i по переменным x_j будет определитель, значение которого в нуле совпадает с $\det(h_{ij}(0))$ и потому отлично от нуля. Отсюда, как мы видели при обсуждении определения 2.7, следует, что существует локальная система координат φ: $U \to V$, для которой y_i являются координатами в V, и тогда в ней $f\varphi^{-1} = \sum c_i y_i^2$; каждое c_i может быть равным 1 или —1.

Сигнатура формы $\sum c_i y_i^2$, появляющейся в теореме 4.1 (т. е. число положительных c_i минус число отрицательных c_i), является инвариантом относительно линейных преобразований переменных[1]). Отсюда следует, что он зависит только от функции f и

[1]) При переходе от одной локальной системы координат к другой квадратичная форма, коэффициенты которой — вторые производные в *критической* точке p, преобразуется так, как преобразуется квадратичная форма при линейном преобразовании переменных, матрица коэффициентов которого совпадает с матрицей Якоби замены координат в точке p. Поэтому инварианты этой формы не зависят от используемых локальных координат и могут быть связаны с самой p как с критической точкой функции f. (Это не зависит от невырожденности точки p и от теоремы 4.1.) — *Прим. ред.*

точки p. Но так как для невырожденной точки ранг квадратичной формы $\sum c_i y_i^2$ равен размерности многообразия M, число r отрицательных c_i тоже зависит только от точки p и функции f, но не от выбора системы координат.

Определение 4.6. Только что введенное число r, связанное с невырожденной критической точкой функции f, мы будем называть *индексом критической точки*[1]).

4.4. Усиление теоремы о вложении

В упражнениях 4.8 и 4.9 рассматривались две функции y и z на торе, причем одна имела вырожденные критические точки, а другая — невырожденные. Сейчас нам удобнее в упражнении 4.9 поменять местами оси y и z. Таким образом, мы вкладываем тор в трехмерное пространство двумя способами: как поверхность

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2)$$

и как поверхность

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$

В обоих случаях координата z является гладкой функцией на вложенном торе, причем в первом случае она имеет четыре невырожденные критические точки (рис. 4.2), тогда как во втором случае у нее имеется бесконечное множество вырожденных критических точек (рис. 4.4). Рассматривая невырожденные критические точки как более простые, мы будем считать, что первое вложение «лучше» второго.

---

[1]) Автор называет его *типовым числом*, но термин «индекс» употребляется чаще. Вообще, следует иметь в виду, что терминология здесь не вполне установилась. Так, индексом квадратичной формы иногда называют число отрицательных слагаемых при ее представлении в виде суммы квадратов, иногда сигнатуру, т. е. разность между числом положительных и числом отрицательных слагаемых, а иногда — меньшее из последних двух чисел. — *Прим. ред.*

На самом деле наличие вырожденных критических точек является, в известном смысле, исключением: небольшое вычисление показывает, что стоит лишь чуть-чуть повернуть поверхность, и функция z будет иметь четыре невырожденные критические точки.

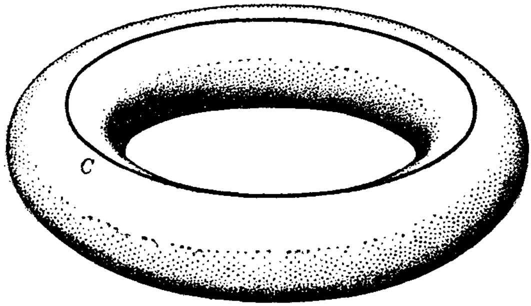


Рис. 4.4. На «горизонтально» вложенном торе имеются вырожденные критические точки функции z; они образуют две окружности, одна из которых (C) показана.

Рассмотренная ситуация является частным случаем следующей общей теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть M — компактное гладкое многообразие, край которого является несвязным объединением $M_1 \cup M_2$. Тогда существует гладкое вложение f многообразия M в N-мерное евклидово пространство со следующими свойствами:*

(1) $f(M)$ целиком лежит во множестве тех x, для которых $0 \leqslant x_N \leqslant 1$, а $f(M_1)$ и $f(M_2)$ — пересечения $f(M)$ с гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$ соответственно.

(2) Функция x_N на $f(M)$ имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и лежат вне гиперплоскостей $x_N = 0$ и $x_N = 1$. Можно вдобавок добиться того, чтобы никаким двум точкам не соответствовало одно значение x_N.

Условие (2) означает, в частности, что среди гиперплоскостей $x_N = c$ имеется лишь конечное число касательных к $f(M)$, причем каждая такая гиперплоскость соответствует в точности одной точке касания.

Конечно, можно сформулировать теорему и по-другому. Функцию x_N на $f(M)$ можно перенести посредством отображения f на многообразие M, получив там гладкую функцию φ. Таким образом, теорема утверждает, что на M можно найти гладкую функцию φ, которая равна нулю на M_1 и единице на M_2, удовлетворяет неравенству $0 < \varphi(p) < 1$ во всех точках p, не лежащих на крае, и имеет лишь конечное число критических точек; все эти точки невырожденны, соответствуют различным значениям φ и не лежат ни в M_1, ни в M_2.

Заметим, что если M — компактное гладкое многообразие без края, то справедливо аналогичное утверждение, отличающееся только тем, что ничего не говорится о крае.

Доказательство теоремы 4.2 довольно сложное, и мы не будем приводить его здесь. Однако данная здесь формулировка намекает на один из возможных подходов к доказательству. Вспомним, что, как мы уже видели, для данного многообразия M с краем $M_1 \cup M_2$ существует вложение в евклидово пространство, удовлетворяющее условию (1). Идея теперь состоит в том, чтобы подправить это вложение f так, чтобы и условие (2) тоже выполнялось.

В качестве первого шага следует показать, что отображение f можно приблизить отображением f', для которого $f'(M)$ является частью алгебраического многообразия, т. е. частью множества нулей конечного числа полиномиальных уравнений от координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$ евклидова пространства. Заметим, что в приведенных выше примерах вложения тора в трехмерное пространство этот шаг уже пройден. Действительно, в каждом из случаев тор задавался как алгебраическая поверхность.

Второй шаг доказательства — показать, что можно подправить координаты в N-мерном пространстве так, чтобы координата x_N удовлетворяла условию (2) относительно $f'(M)$. Идея — рассмотреть функцию $\sum u_i x_i$, где u_i — вещественные числа. Оказывается, условие, состоящее в том, что эта функция должна иметь бесконечное число критических точек или вырожденные критические точки, налагает на u_i некоторые алгебраические уравнения. Поэтому выберем значения u_i, не удовлетворяющие этим уравнениям, и сделаем замену координат, после которой $\sum u_i x_i$ станет N-й координатой. Тогда условие (2) будет выполнено[1]).

§ 5. КРИТИЧЕСКИЕ И НЕКРИТИЧЕСКИЕ УРОВНИ

5.1. Определения и примеры

Предположим, что M — компактное гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, которое вложено в евклидово пространство так, что оно целиком лежит между гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$, а M_0 и M_1 суть пересечения M с этими гиперплоскостями. Сейчас мы подробно изучим связь между различными сечениями многообразия M гиперплоскостями $x_N = \text{const}$. Вместо этого можно было бы исследовать множества уровней гладкой на M функции, не обращаясь к евклидову пространству. Однако вложение в евклидово пространство автоматически дает понятие перпендикулярности, которое нам вскоре понадобится.

Определение 5.1. Если сечение M_c многообразия M гиперплоскостью $x_N = c$ содержит критическую точку функции x_N, то мы будем называть M_c *критическим уровнем функции* x_N. В противном случае будем называть его *некритическим уровнем функции* x_N.

---

[1]) Зато условие (1) нарушится, так что после этого придется еще раз «подправить» наше вложение. После того как читатель изучит Милнора, он сможет доказать теорему 4.2, пользуясь теоремой Сарда вместо алгебраической аппроксимации, которая является хотя и более элементарной (ни слова о мере!), но зато гораздо более громоздкой. — *Прим. ред.*

В частности, в примере 4.2 функция z на торе имеет четыре критических уровня, а именно сечения плоскостями H_1, H_2, H_3, H_4. Заметим, что в этом примере каждый критический уровень M_c окружен соседними некритическими уровнями, причем соседние уровни, лежащие выше M_c, гомеоморфны друг другу так же, как и соседние уровни, лежащие ниже M_c. Например (рис. 5.1), между гиперплоскостями H_1 и H_2

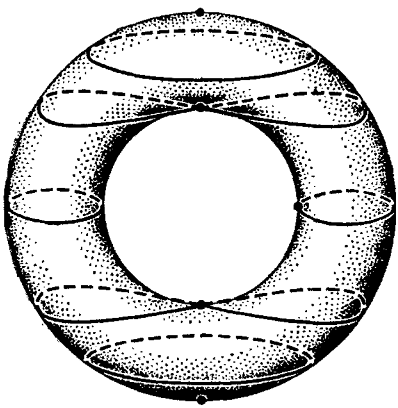


Рис. 5.1. Критические и некритические уровни функции z на торе.

все некритические уровни являются окружностями. С другой стороны, при прохождении критического уровня вид сечения изменяется. Некритические уровни, расположенные вблизи плоскости H_2 и ниже нее, отличаются от близких уровней, лежащих выше этой плоскости. Основная цель этого параграфа — показать, что только что сделанные замечания справедливы в общем случае, и точно выяснить, что происходит, когда мы совершаем переход с одной стороны критического уровня на другую.

Мы будем проводить это исследование с помощью семейства траекторий, ортогональных к сечениям M_c, т. е. семейства кривых на M, которые имеют гладкие параметрические уравнения и пересекают уровни M_c

под прямым углом (за исключением критических точек)[1]. Это понятие можно проиллюстрировать на следующем довольно простом примере.

Пусть M — двумерная сфера в трехмерном евклидовом пространстве. Функция z имеет две критические точки — северный и южный полюс. Некритические уровни функции z — это линии широты. Ортогональные траектории этих уровней являются меридианами. Представим себе, что точки одного некритического уровня скользят вдоль меридианов до тех пор, пока не достигнут другого некритического уровня. Тогда получится отображение одного уровня на другой. Кроме того, если M_c — некритический уровень, то его окрестность можно представить как объединение дуг меридианов; поэтому она имеет вид $M_c \times I$, где I — интервал.

Как выяснится, аналогичная ситуация имеет место в общем случае. Поэтому нам будет нужно изучить поведение ортогональных траекторий вблизи критических точек. Из приведенного примера уже сейчас видно, что для критических точек перестает быть верным тот факт, что через каждую точку проходит ровно одна траектория.

В первую очередь надо построить в общем случае семейство ортогональных траекторий. Мы сделаем это, установив систему дифференциальных уравнений для ортогональных траекторий и применив теорему о существовании и единственности из теории дифференциальных уравнений.

Итак, начнем с окрестности U в N-мерном евклидовом пространстве, в которой M является множеством точек, удовлетворяющих уравнениям вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

[1]) В критической точке не определено, какое направление ортогонально к M_c в этой точке — из рис. 5.1 видно, что критический уровень может не быть многообразием. — *Прим. ред.*

где f_i — гладкие функции. Из леммы 4.3 следует, что если $U \cap M$ не содержит ни одной критической точки функции x_N, то саму x_N можно принять за одну из локальных координат в открытом множестве $U \cap M$. Отсюда следует, что после подходящей перенумерации координат $U \cap M$ станет множеством точек, удовлетворяющих уравнениям

$$(1) \quad x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_N), \qquad i = n, n+1, \ldots, N-1.$$

Тогда множество $U \cap M_c$, если оно непусто, будет задаваться уравнениями (1) и дополнительным уравнением $x_N = c$.

Пусть $p \in U \cap M$. Обозначим через $x_i(p)$ значение координаты x_i в точке p. Таким образом, для уровня M_c, проходящего через точку p, имеем $c = x_N(p)$. Пусть T_p — касательное пространство к многообразию M в точке p, а T'_p — касательное пространство к M_c в этой же точке. Тогда T_p и T'_p имеют размерности n и $n-1$ соответственно и $T'_p \subset T_p$ (упражнение 4.3). Так как p не является критической точкой функции x_N (множество U вообще не содержит критических точек), пространство T_p не лежит в гиперплоскости $x_N = c = x_N(p)$. С другой стороны, пространство T'_p, очевидно, лежит в этой гиперплоскости, и потому направление в T_p, ортогональное пространству T'_p, не попадает в гиперплоскость $x_N = x_N(p)$. Таким образом, кривая в M, проходящая через точку p и имеющая касательную, ортогональную пространству T'_p, должна была бы записываться параметрическими уравнениями вида

$$x_i = \varphi_i(x_N), \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

так что касательная к ней будет иметь направление с угловыми коэффициентами

$$(2) \qquad (\varphi'_1(x_N), \varphi'_2(x_N), \ldots, \varphi'_{N-1}(x_N), 1),$$

где у каждой производной надо взять значение в точке p.

Уравнения пространства T_p имеют вид

$$(3)\quad x_i - x_i(p) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j(p)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)_p (x_N - x_N(p)),$$

где индекс p справа внизу означает, что значение производной берется в точке p. А вот уравнения пространства T'_p:

$$(4)\quad x_i - x_i(p) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p (x_i - x_i(p)).$$

Направление (2) должно быть ортогонально пространству T'_p, а это равносильно тому, что оно ортогонально множеству из $n-1$ линейно независимых направлений в пространстве T'_p. Множеством таких направлений будет множество линейно независимых решений уравнений (4), которые рассматриваются как линейные уравнения относительно $x_i - x_i(p)$. Следующие $n-1$ строк образуют множество линейно независимых решений:

$$(5)\quad \begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_p,\ \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}\right)_p,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_1}\right)_p,\ 0; \\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_p,\ \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2}\right)_p,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_2}\right)_p,\ 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}\right)_p,\ \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n-1}}\right)_p,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_p,\ 0. \end{array}$$

Таким образом, направление (2) должно быть ортогонально этим векторам и, кроме того, удовлетворять уравнениям (3), если подставить числа (2) вместо $x_i - x_i(p)$ (последнее условие обеспечивает, что наше направление лежит в пространстве T_p).

Упражнение 5.1. Докажите, что полученная система линейных уравнений для (2) имеет единственное решение, выражающее $d\varphi_i/dx_N$ ($i = 1, 2, \ldots, N-1$) в виде функции, гладкой на многообразии M, из которого исключены критические точки функции x_N.

Обратимся теперь к теореме из теории дифференциальных уравнений (см. [1]), утверждающей, что у системы дифференциальных уравнений типа той, которая только что у нас получилась и в которой $d\varphi_i/dx_N$ выражаются как гладкие функции, существуют решения $x_i = \varphi_i(x_N)$, $i = 1, \ldots, N-1$; каждое решение дает параметрическое представление некоторой кривой на многообразии M. Из различных решений получается семейство F кривых. Это семейство обладает тем свойством, что через каждую некритическую точку на M проходит ровно одна кривая из F. Из построения нашей системы дифференциальных уравнений видно, что семейство F есть требуемое семейство ортогональных траекторий для уровней M_c. Та же теорема о дифференциальных уравнениях дает нам дополнительную информацию о том, как выглядят уравнения кривых из семейства F в окрестности точки на M, не содержащей критических точек функции x_N: эти уравнения можно записать в виде

$$x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_N), \tag{6}$$

где координата x_N берется в качестве параметра на кривой, $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0$ — локальные координаты точки, в которой рассматриваемая кривая пересекает фиксированный уровень M_c, а функции φ_i являются гладкими по всем своим аргументам [1]).

---

[1]) Строго говоря, одной ссылки на известные теоремы из теории дифференциальных уравнений здесь мало. Эти теоремы относятся к системам дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, \ldots, x_N), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

правые части которых определены в некоторой области евклидова пространства $(x_1, \ldots, x_N)$. У нас же dx_i/dx_N выражаются как некоторые гладкие функции на $M \setminus \{$критические точки$\}$.

Воспользуемся локальными координатами на M; пусть это будут, скажем, $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_N$. Тогда наши дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{dx_i}{dx_N} = G_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_N), \qquad i = 1, \ldots, N-1, \tag{*}$$

Упражнения. 5.2. Докажите, что уравнения (6) можно использовать для того, чтобы ввести новую систему локальных координат в окрестности некритической точки функции x_N, задавая точку ее параметром x_N на соответствующей кривой семейства F и координатами той точки, в которой эта кривая пересекает фиксированный уровень M_c.

Выведите отсюда, что если M_c — некритический уровень функции x_N, то у него есть окрестность в M, диффеоморфная произведению $M_c \times I$, где I — открытый интервал значений функции x_N. Докажите, что аналогичный результат будет справедлив для критического уровня, если исключить окрестность критической точки [1]).

5.3. Выведите из предыдущего упражнения, что если M_{c_1} и M_{c_2} — два последовательных критических уровня (т. е. таких, что все уровни M_c, у которых $c_1 < c < c_2$, — некритические), то часть многообразия M, заключенная между M_{c_1} и M_{c_2}, диффеоморфна произведению $M_c \times I$, где $c_1 < c < c_2$.

5.4. Выведите также из упражнения 5.2, что если между двумя некритическими уровнями нет ни одного критического, то эти уровни диффеоморфны.

где G_i — не произвольные, а вполне определенные функции, которые однозначно определяются из сказанного на стр. 93, хотя мы и не получили для них явных выражений. Если из этих уравнений (*) оставить только первые $n-1$, то получится такая система, как в теории дифференциальных уравнений. Используя специфические свойства наших G_i, можно доказать, что если $x_1(x_N), \ldots, x_{n-1}(x_N)$ — решение этой системы, то функции

$$x_j(x_N) = f_j(x_1(x_N), \ldots, x_{n-1}(x_N), x_N), \quad j = n, \ldots, N-1,$$

где f_j — те же, что в (1), будут удовлетворять остальным уравнениям (*). Мы приходим к такой ситуации: многообразие $M \setminus \{$критические точки$\}$ покрыто координатными окрестностями, в каждой из них через каждую точку проходит короткий кусок ортогональной траектории. Теперь из этих коротких кусков надо «склеить» «целые» ортогональные траектории. Это не сложно, но требует времени и места (и напоминает продолжение решения системы дифференциальных уравнений до границы области определения правых частей). При первом чтении, вероятно, лучше не вникать в эти детали, которые, собственно, и не относятся к дифференциальной топологии. Поэтому я ограничусь замечанием, что удобно пользоваться другой параметризацией ортогональных траекторий, при которой критические точки не выпадают из области определения наших дифференциальных уравнений, но являются положениями равновесия (соответствующие решения — константы). См. [22], начало § 3. — *Прим. ред.*

[1]) Точнее: если c — критический уровень, а U и V — две малые окрестности критической точки, причем $U \supset \overline{V}$, то $M_c \setminus U$ имеет окрестность, диффеоморфную $(M_c \setminus V) \times I$. — *Прим. ред.*

5.2. Окрестность критического уровня; разбор одного примера

В предыдущем разделе мы показали, что когда c возрастает от 0 до 1, сечение M_c не меняется до тех пор, пока мы остаемся между двумя критическими уровнями (диффеоморфные многообразия считаются одинаковыми). Однако когда мы проходим критический уровень, M_c изменяется, и наш следующий шаг — изучить природу этого изменения.

Итак, пусть M_c — критический уровень функции x_N, и пусть P — критическая точка на M_c. Как уже отмечалось, ортогональные траектории из семейства F ведут себя в окрестности любой точки уровня M_c, отличной от P, по существу так же, как и в окрестности некритического уровня. Теперь очень важно изучить их поведение в окрестности точки P.

Мы начнем с анализа примера 4.2, в котором рассматривалась функция z на торе M, вложенном в трехмерное пространство; здесь мы уделим особое внимание изучению окрестности критической точки P_3. Мы уже видели (в разделе 4.2), что первым приближением к тору в окрестности этой точки является поверхность с уравнением $z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$. Это можно уточнить с помощью теоремы 4.1, эквивалентная формулировка которой для нашего случая выглядит так: существует диффеоморфизм φ, который окрестности точки P_3 на торе отображает на окрестности точки $(0, 0, 0)$ на поверхности $z = y^2 - x^2$ (множитель $^1/_2$ убирается подходящим изменением масштаба). Конечно, диффеоморфизм φ не обязан переводить ортогональные траектории горизонтальных сечений тора в ортогональные траектории горизонтальных сечений поверхности $z = y^2 - x^2$. С другой стороны, последние представляют собой более удобный объект для изучения, и хорошо бы свести все дело именно к ним; тогда мы будем иметь стандартное описание окрестности любой седловой точки. Чтобы сделать это, покажем, что ортогональные траектории F к горизонтальным сечениям тора можно подправить в окрестности точки P_3 таким образом, чтобы получилось новое семейство F' с аналогичными свойствами[1]), но уже такое, что отображение φ переводит его часть, лежащую в окрестности точки P_3, в семейство F_0 траекторий, ортогональных к горизонтальным сечениям поверхности $z = y^2 - x^2$.

Мы используем совсем простой прием. Каждой точке p на торе, которая близка к P_3, но не равна ей, соответствуют два направления: одно из них — касательная к кривой семейства F, проходящей через точку p, а другое — касательная к кривой семейства $\varphi^{-1}(F_0)$, проходящей через p. Обозначим эти направления через $(l_1, l_2, 1)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ соответственно. Сопоставим точке p направление

$$(7) \qquad (g\lambda_1 + (1-g)l_1,\ g\lambda_2 + (1-g)l_2,\ 1),$$

где g — гладкая функция на торе, равная нулю вне окрестности точки P_3 и единице внутри некоторой меньшей окрестности. Построим новое семейство кривых F', касательных к этому направлению. Заметим, что по мере приближения к точке P_3 направление (7) постепенно изменяется от $(l_1, l_2, 1)$ до $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$. Поэтому семейство F' будет совпадать с F вне окрестности точки P_3, а в меньшей окрестности оно будет совпадать с семейством $\varphi^{-1}(F_0)$.

Как уже отмечалось раньше, это означает, что можно исследовать окрестность H_3 на торе, используя

[1]) Новые кривые уже не будут ортогональны к сечениям тора горизонтальными плоскостями, но, во всяком случае, не будут их касаться и даже не будут образовывать с ними малых углов; фактически легко добиться, чтобы не было углов, меньших, скажем, 89°. (Это следует из того, что в достаточно малой окрестности точки P_3 рассматриваемые ниже направления $(l_1, l_2, 1)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ будут сколь угодно близки друг к другу. Действительно, пусть p — близкая к P_3 точка тора с координатами (x, y, z), и пусть $p' = (x, y, y^2 - x^2)$. Направление $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ в точке p — это направление кривой $\varphi^{-1}(C)$, где C — кривая из семейства F_0, проходящая через точку $\varphi(p)$. Чем ближе p к P_3, тем слабее изменяет φ углы и направления, поэтому рассматриваемое направление близко к направлению кривой C в точке $\varphi(p)$, а оно близко к направлению в точке p' проходящей через нее кривой семейства F_0; наконец, последнее направление близко к направлению $(l_1, l_2, 1)$ в точке p.) — *Прим. ред.*

подправленное семейство (почти) ортогональных траекторий F', а отсюда следует, что окрестность точки P_3 можно изучать, рассматривая поверхность $z = y^2 - x^2$ в окрестности начала координат и используя кривые семейства F_0 на этой поверхности.

5.3. Окрестность критического уровня; общее обсуждение

Теперь мы реализуем в общем случае идеи, проиллюстрированные в предыдущем разделе на двумерном примере. Точнее, мы сравним окрестность невырожденной критической точки функции на данном многообразии с некоторой окрестностью стандартной критической точки (в примере она соответствует началу координат на поверхности $z = y^2 - x^2$).

Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n, f — гладкая функция на M, а p — невырожденная критическая точка функции f. Прибавляя подходящую константу, мы можем считать, что $f(p) = 0$. Используем теорему 4.1 для того, чтобы ввести в окрестности U точки p локальную систему координат $\psi\colon U \to V$, в которой

$$f\psi^{-1} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^2, \tag{8}$$

где y_i — евклидовы координаты в V, а каждое c_i равно ± 1. Все y_i равны нулю в точке $\psi(p)$.

Наряду с этим рассмотрим в евклидовом пространстве размерности $n+1$ с координатами $(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$ гиперповерхность Q, заданную уравнением

$$z = \sum c_i y_i^2. \tag{9}$$

Множество V можно отождествить с окрестностью начала координат на гиперплоскости $z = 0$. Пусть V' — окрестность на Q, которая проектируется на V. Определим отображение $\varphi\colon U \to V'$, переводя точку q в точку с координатами $(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$, где $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — координаты точки $\psi(q)$, а z определяется из равенства (9). Теперь заметим, что значение функции $f\varphi^{-1}$ в точке $(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$ на Q то же, что и у функции $f\psi^{-1}$ в точке $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а именно $\sum c_i y_i^2$, и поэтому, согласно формуле (9), оно совпадает со значением координаты z в этой точке.

Таким образом, $\varphi\colon U \to V'$ является отображением на открытое множество в Q, для которого $f\varphi^{-1}$ есть функция z. Отсюда, в частности, следует, что подмножества вида $f = \mathrm{const}$ в U переходят в сечения гиперповерхности Q гиперплоскостями $z = \mathrm{const}$.

Предположим теперь, что многообразие M вложено в N-мерное евклидово пространство так, что функция f на M совпадает с x_N (см. лемму 4.2), и построим, так же как в разд. 5.1, семейство F ортогональных траекторий к сечениям многообразия M гиперплоскостями $x_N = \mathrm{const}$. Сейчас мы «подправим» семейство F в окрестности точки p по аналогии с тем, как мы делали это в разд. 5.2.

Итак, пусть F_0 — семейство траекторий на гиперповерхности второго порядка, ортогональных к сечениям гиперплоскостями $z = c$. Семейство F_0 определено во всех точках, кроме начала координат. Тогда, обозначив через $\varphi^{-1}(F_0)$ прообраз этого семейства в U, мы получаем, что через каждую точку $q \in U$, отличную от p, проходит две кривых — одна из семейства F, другая из $\varphi^{-1}(F_0)$. Запишем направления касательных к этим прямым в виде векторов

$$(10) \qquad (l_1(q),\ l_2(q),\ \ldots,\ l_{N-1}(q),\ 1),$$

$$(11) \qquad (\lambda_1(q),\ \lambda_2(q),\ \ldots,\ \lambda_{N-1}(q),\ 1)$$

соответственно. Заметим, что последнюю координату действительно можно сделать равной 1, так как ни одно из этих направлений не горизонтально.

Далее, пусть U_1 — другая окрестность точки p, такая, что $\overline{U}_1 \subset U$. Для простоты лучше взять в качестве U_1 клетку. Найдем гладкую функцию g на M, которая равна 1 на $\overline{U}_1$ и нулю вне U (см. упражнение 2.14). Теперь сопоставим каждой точке $q \in U$

направление, заданное вектором

$$(12)\quad (g(q)\lambda_1(q)+(1-g(q))l_1(q),\ \ldots,\ g(q)\cdot\lambda_{N-1}(q)+ \\ +(1-g(q))\cdot l_{N-1}(q),\ 1).$$

Заметим, что это сопоставление можно продолжить на все многообразие M, беря для каждой точки вне U вектор $(l_1, l_2, \ldots, l_{N-1}, 1)$. Наконец, чтобы найти семейство кривых, касательные к которым в каждой точке задаются формулой (12), надо решить систему дифференциальных уравнений

$$(13)\qquad \left(\frac{dx_i}{dx_N}\right)_q = g(q)\lambda_i(q)+(1-g(q))l_i(q), \\ i=1, 2, \ldots, N-1.$$

Так как функции, стоящие в правой части этих уравнений, являются гладкими во всех точках многообразия M, кроме критических точек функции x_N, мы можем применить цитированную выше теорему о существовании (см. [1]), которая показывает, что на многообразии M, из которого исключены критические точки функции x_N, существует семейство гладких кривых F' с соответствующими направлениями; через каждую точку проходит ровно одна кривая. Но вектор (12) совпадает с (11) в окрестности U_1 и с (10) вне окрестности U; отсюда следует, что семейство F' совпадает с $\varphi^{-1}(F_0)$ в U_1 и с F вне U, что и требовалось.

5.4. Окрестность критической точки

Как мы уже объясняли, в первую очередь надо исследовать частный случай окрестности начала координат на гиперповерхности (9). Тогда мы сможем перенести информацию на многообразие M при помощи отображения φ^{-1}, определенного в предыдущем разделе. Бóльшая часть рассуждений, необходимых для получения основного результата этого раздела, будет дана в виде серии упражнений.

Упражнения. 5.5. Пусть H — гиперповерхность, заданная уравнением $z = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве. Докажите, что ортогональные траектории на H для сечений гиперплоскостями $z = \mathrm{const}$ проектируются на ортогональные траектории семейства подмногообразий $f = \mathrm{const}$ в n-мерном пространстве $z = 0$. (Нужно заметить, что касательные пространства к горизонтальным сечениям гиперповерхности H проектируются в касательные пространства к множествам $f = \mathrm{const}$ и что прямые, ортогональные первым, проектируются в прямые, ортогональные вторым.)

5.6. Работая теперь в n-мерном пространстве с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, рассмотрим семейство гиперповерхностей $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \mathrm{const}$. Покажите, что ортогональные траектории этого семейства удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}, \tag{14}$$

где $f_i = \partial f/\partial y_i$. Выведите отсюда, что для семейства гиперповерхностей

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \ldots - y_n^2 = \mathrm{const} \tag{15}$$

ортогональные траектории определяются уравнениями

$$\begin{gathered} y_2' y_1 = y_1' y_2, \ \ldots, \ y_r' y_1 = y_1' y_r, \\ y_{r+2}' y_{r+1} = y_{r+1}' y_{r+2}, \ \ldots, \ y_n' y_{r+1} = y_{r+1}' y_n, \\ y_1 y_{r+1} = y_1' y_{r+1}', \end{gathered} \tag{16}$$

где $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ — константы. Именно эти уравнения определяют ортогональную траекторию, проходящую через точку $(y_1', y_2', \ldots, y_n')$.

Покажите, что через каждую точку $(y_1', y_2', \ldots, y_n')$, отличную от $(0, 0, \ldots, 0)$, проходит ровно одна кривая семейства (16). Далее, покажите, что гиперповерхность из семейства (15), проходящая через начало координат, представляет собой $(n-1)$-мерный конус с вершиной в начале координат; поэтому бесполезно надеяться на выполнение условия ортогональности в этой точке.

5.7. Заметим, что все уравнения (16), кроме последнего, линейны; на самом деле они линейно независимы, если оба числа y_1' и y_{r+1}' отличны от нуля. Таким образом, в случае $y_1' \neq 0$, $y_{r+1}' \neq 0$ уравнения (16) определяют гиперболу. Но условие на y_1' и y_{r+1}' зависит от произвола в нумерации координат y_i. Преобразуя уравнения ортогональных траекторий, покажите, что если одно из $y_1', y_2', \ldots, y_r'$ отлично от нуля и одно из y_{r+1}',

$y'_{r+2}, \ldots, y'_n$ отлично от нуля, то траектория, проходящая через точку $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$, представляет собой гиперболу.

5.8. В дополнение к предыдущему упражнению покажите, что если у одной из траекторий $y'_i = 0$ в какой-нибудь точке, то $y_i = 0$ вдоль всей траектории. (Выведите это непосредственно из дифференциальных уравнений.) Используйте это для доказательства того, что траектория, проходящая через точку, у которой $y'_1 = y'_2 = \ldots = y'_r = 0$, является лучом, исходящим из начала координат. Получите такой же результат для траектории, проходящей через точку с $y'_{r+1} = y'_{r+2} = \ldots = y'_n = 0$. Покажите, кроме того, что если мы будем рассматривать ортогональные траектории только для гиперповерхностей семейства (15) с $-1 \leqslant c \leqslant 1$, то множество траекторий, лежащих в линейном пространстве $y_1 = y_2 = \ldots = y_r = 0$, образует $(n-r)$-мерную клетку E^{n-r}, граница которой есть сфера S^{n-r-1}, высекаемая в этом пространстве гиперповерхностью (15) с $c = -1$, в то время как траектории, лежащие в пространстве $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$, образуют r-мерную клетку E^r, граница которой является сферой S^{r-1}, высекаемой гиперповерхностью (15) с $c = 1$. Заметим, что клетки E^r и E^{n-r} имеют единственную общую точку — начало координат.

Прежде чем продолжать изучение общей ситуации, полезно разобрать более подробно пример с $n = 3$. Для удобства изменив обозначения, рассмотрим семейство поверхностей

$$x^2 - y^2 - z^2 = c,$$

где $-1 \leqslant c \leqslant 1$. Заметим, что если положить c равным -1 и 1, то получатся соответственно однополостный и двуполостный гиперболоид, причем двуполостный гиперболоид окажется внутри однополостного (см. рис. 5.2).

Как мы уже показали выше, ортогональные траектории этого семейства поверхностей представляют собой дуги гипербол, за исключением прямолинейных отрезков, образующих две клетки E^1 и E^2, описанные в упражнении 5.8. На рис. 5.2 границы этих клеток обозначены через S^0 и S^1 соответственно.

Рассмотрим теперь траектории, которые начинаются в окрестности множества S^0 и кончаются в окрестности множества S^1. В данном случае окрестность множества S^0 представляет собой объединение двух кругов, а окрестность множества S^1 — полосу, опоясывающую однополостный гиперболоид. Первую окрестность можно представить как $S^0 \times E^2$, а вторую — как $S^1 \times E^1$. Кроме того, интуитивно ясно, что если правильно подобрать размеры этих окрестностей, то множество тех ортогональных траекторий, которые начинаются в первой окрестности, совпадает с множеством тех, которые кончаются во второй, а

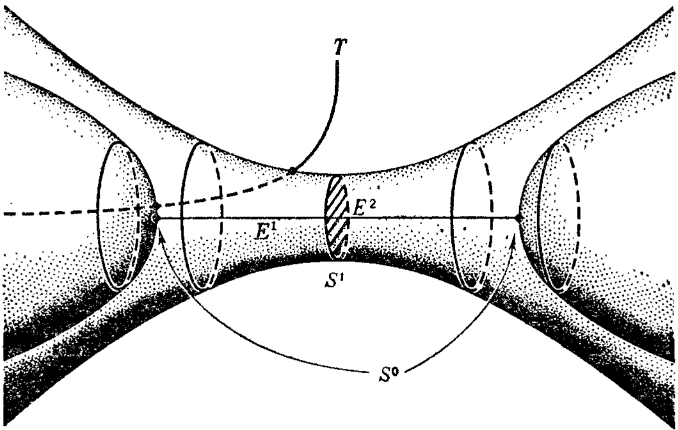


Рис. 5.2. Ортогональная траектория T, проходящая возле S^0, проходит возле S^1.

объединение всех этих траекторий, вместе с клетками E^1 и E^2, образует трехмерную клетку E^3. Граница этой клетки является сферой и разлагается в объединение трех множеств, как это показано на рис. 5.3. Первые два множества — это $S^0 \times E^2$ и $S^1 \times E^1$ (окрестности множеств S^0 и S^1 на двух гиперболоидах), а третье состоит из ортогональных траекторий, соединяющих точки на границах окрестностей $S^0 \times E^2$ и $E^1 \times S^1$ (каждая из этих границ является произведением $S^0 \times S^1$). Таким образом, третье множество представляется как $(S^0 \times S^1) \times I$, где I — интервал.

Цель следующей серии упражнений — обобщить только что разобранный частный случай.

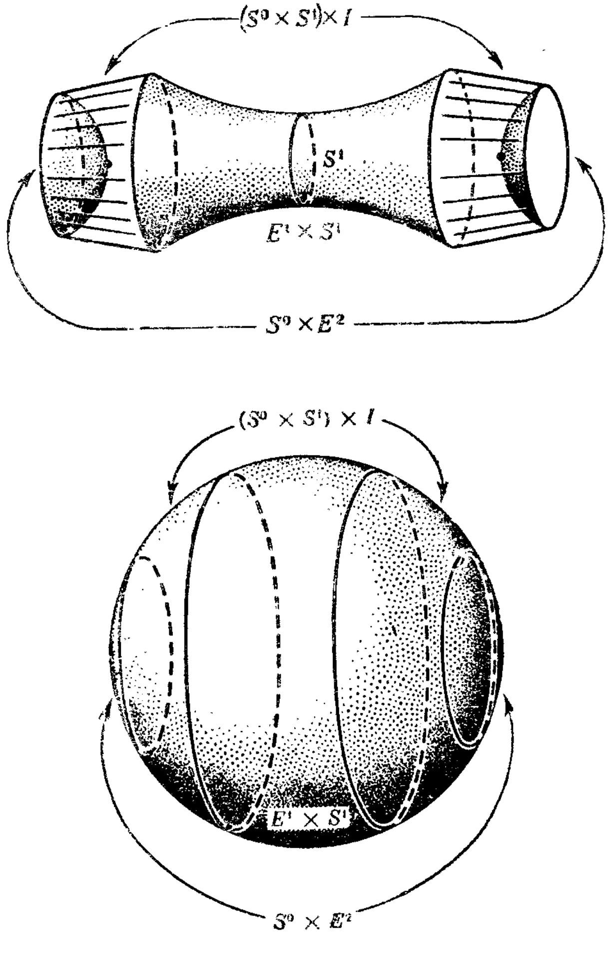


Рис. 5.3. S^2 разлагается на 3 множества; обозначения те же, что и на рис. 5.2.

Упражнения. 5.9. Пусть S^{n-1} — сфера, заданная уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

в n-мерном пространстве. Пусть S^{r-1} есть $(r-1)$-мерная сфера, лежащая на S^{n-1} и заданная уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = 1,$$

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0,$$

а S^{n-r-1} есть $(n-r-1)$-мерная сфера на S^{n-1} с уравнениями

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0,$$

$$x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Проверьте, что любую точку p на S^{r-1} можно соединить с любой точкой q на S^{n-r-1} единственной дугой большого круга, составляющей четвертую часть окружности. Другими словами, лучи, направленные из центра сферы S^{n-1} к точкам p и q, образуют угол $\pi/2$. Покажите, кроме того, что две такие дуги pq и $p'q'$ не имеют общих точек, если $p \neq p'$ и $q \neq q'$; если же либо $p = p'$, либо $q = q'$, то общими будут лишь концевые точки.

5.10. Фиксируем точку p на S^{r-1} и для каждой точки q на S^{n-r-1} обозначим через q_1 середину той дуги pq большого круга, о которой говорилось в упражнении 5.9. Покажите, что если точка p фиксирована, а q пробегает всю сферу S^{n-r-1}, то объединение дуг pq_1 образует $(n-r)$-мерную клетку. Выведите отсюда, что множество точек сферы S^{n-1}, удаленных от S^{r-1} на угловое расстояние $\leqslant \pi/4$, представляется в виде $S^{r-1} \times E^{n-r}$, где E^{n-r} есть $(n-r)$-мерная клетка.

5.11. Выведите из предыдущего упражнения, что S^{n-1} можно представить как объединение множеств $S^{r-1} \times E^{n-r}$ и $E^r \times S^{n-r-1}$. Заметим, что эти множества имеют в S^{n-1} общую границу, а именно $S^{r-1} \times S^{n-r-1}$. Все это можно выразить по-другому, сказав, что сфера S^{n-1} является объединением пространств $S^{r-1} \times E^{n-r}$ и $E^r \times S^{n-r-1}$, в котором каждая точка (p, q) из $S^{r-1} \times S^{n-r-1} = S^{r-1} \times$ (граница E^{n-r}) отождествляется с точкой (p, q) из $S^{r-1} \times S^{n-r-1} =$ (граница E^r) $\times S^{n-r-1}$.

5.12. У предыдущего упражнения имеется другой вариант. На этот раз надо показать, что сфера S^{n-1} разлагается в объединение трех множеств A, B, C, где A является множеством точек, удаленных на угловое расстояние $\leqslant \pi/6$ от S^{r-1}, и представляется в виде $S^{r-1} \times E^{n-r}$, B является множеством точек, удаленных на угловое расстояние $\leqslant \pi/6$ от S^{n-r-1}, и представляется в виде $E^r \times S^{n-r-1}$, а C есть множество точек, удаленных на угловое расстояние $\geqslant \pi/6$ от S^{r-1} и на расстояние $\geqslant \pi/6$ от S^{n-r-1}; оно представляется в виде $S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I$, где I — интервал (например, интервал $(0; 1)$). В этом разложении точка $(p, q) \in A$ с $q \in S^{n-r-1} =$ граница E^{n-r} отождествляется с точкой $(p, q, 1)$ в C, а точка $(p, q) \in B$ с $p = S^{r-1} =$ граница B^r отождествляется с точкой $(p, q, 0)$ в C.

Отметим, что такое разложение сферы S^{n-1} соответствует описанному выше разложению сферы S^2 (рис. 5.3); однако S^2 в том примере появлялась не как поверхность единичного шара, а как множество, связанное с семейством поверхностей второго порядка. Сейчас мы воспроизведем эту ситуацию в общем случае.

5.13. Рассмотрим в n-мерном пространстве семейство гиперповерхностей второго порядка

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_n^2=c, \tag{17}$$

где $-1\leqslant c\leqslant 1$.

Заметим, что сферы S^{r-1} и S^{n-r-1} из упражнения 5.9 лежат на гиперповерхностях этого семейства с параметрами $c=1$ и $c=-1$ соответственно. Проверьте, что луч, направленный из начала координат в любую точку на каждой из сфер S^{r-1}, S^{n-r-1}, образует угол $\geqslant\pi/4$ с любой прямой на конусе

$$x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_n^2=0.$$

Отсюда следует, что множества A и B из упражнения 5.12 гомеоморфно проектируются из начала координат на некоторые куски гиперповерхностей (17) с параметрами $c=1$ и $c=-1$ соответственно. Обозначим это проектирование через π. Пусть p и q — две точки на границах множеств A и B соответственно, соединенные одной из тех дуг большого круга, объединение которых дает множество C. Обозначив эту дугу через α, проверьте, что точки $\pi(p)$ и $\pi(q)$ лежат на одной гиперболической дуге β, которая является одной из ортогональных траекторий семейства (17), и что α проектируется из начала координат в дугу β.

Таким образом, существует гомеоморфный образ сферы относительно проектирования π, который является объединением трех множеств $\pi(A)$, $\pi(B)$, $\pi(C)$, причем $\pi(A)$ и $\pi(B)$ лежат на двух гиперповерхностях семейства (17) с параметрами $c=1$ и $c=-1$ соответственно, а $\pi(C)$ есть объединение дуг ортогональных траекторий семейства (17).

5.14. Выведите из двух последних упражнений, что на n-мерной клетке E^n (с границей $\pi(S^{n-1})$) существует такая гладкая функция f, что $f=0$ на $\pi(A)$, $f=1$ на $\pi(B)$ и $f=t$ на подмножестве $\pi(S^{r-1}\times S^{n-r-1}\times\{t\})$ из $\pi(C)=\pi(S^{r-1}\times S^{n-r-1}\times I)$.

5.5. Окрестность критического уровня; итоги

Все результаты, необходимые для описания окрестности критического уровня гладкой функции, к настоящему моменту уже получены, и в этом разделе мы просто соберем их вместе.

Теорема 5.1. *Пусть M — гладкое многообразие размерности n, f — гладкая функция на M, и пусть* *в обозначениях определения* 5.1 M_c — *критический уровень функции* f, *на котором лежит одна невырожденная критическая точка* P. *Пусть* M_a *и* M_b — *некритические уровни функции* f, *причем* $a < c < b$ *и* M_c — *единственный критический уровень между* a *и* b. *Тогда точка* P *имеет окрестность* E^n *в* M, *которая является* n-*мерной клеткой и граница* S^{n-1} *которой есть объединение трех множеств* A, B, C[1]. *Множество* A *лежит на уровне* M_a *и диффеоморфно произведению* $S^{r-1} \times E^{n-r}$ (*для некоторого* r); B *лежит на уровне* M_b *и диффеоморфно* $E^r \times S^{n-r-1}$; *наконец,* C *заключено между уровнями* M_a *и* M_b *и может быть представлено как* $S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I$. *При этом каждая точка* $(p, q) \in A$, *где* $p \in S^{r-1}$ *и* $q \in S^{n-r-1}$ = *граница* E^{n-r}, *отождествляется с точкой* $(p, q, 0)$ *на* C, *а каждая точка* (p, q) *на* B, *где* $p \in S^{r-1}$ = *граница* E_r *и* $q \in S^{n-r-1}$, *отождествляется с точкой* $(p, q, 1)$ *на* C.

Кроме того, если мы выкинем клетку E^n *из части* M, *заключенной между* M_a *и* M_b, *то оставшееся множество можно представить в виде* $(M_a \setminus A) \times I$, *где* $(M_a \setminus A) \times \{0\}$ *отождествляется с* $M_a \setminus A$, *а* $(M_a \setminus A) \times \{1\}$ — *с* $(M_a \setminus B)$.

Доказательство. Из упражнения 5.4 следует, что достаточно доказать теорему 5.1 для значений a и b, близких к c; насколько близких — это мы выясним в ходе доказательства.

Начнем с того, что возьмем окрестность U точки P, такую, как в разд. 5.3, и построим «подправленное» семейство F' (почти) ортогональных траекторий для многообразий уровня функции f. Вспомним, что в меньшей окрестности U' точки P эти траектории совпадают с траекториями семейства $\varphi^{-1}(F_0)$, где φ — отображение, определенное в разд. 5.3, а F_0 — семейство ортогональных траекторий, построенное для горизонтальных сечений гиперповерхности в $(n+1)$-мерном пространстве, заданной уравнением

$$z = \sum c_i y_i^2,$$

[1]) S^{n-1} — не гладкое многообразие, хотя A, B, C гладкие: см. рис. 5.2. — *Прим. ред.*

в котором все c_i равны ± 1. Согласно упражнению 5.5, при проектировании на пространство $z = 0$ семейство F_0 переходит в ортогональные траектории семейства

$$\sum c_i y_i^2 = c.$$

Изменяя, если это необходимо, масштаб координат y_i, мы можем считать, что клетка E^n из упражнения 5.14 лежит в образе окрестности U' при отображении φ. Обозначим через E^n прообраз этой клетки в M. Это и есть искомая клетка, существование которой утверждает теорема 5.1, если только некритические уровни M_a и M_b подобраны так, чтобы их части, лежащие в U', попадали при отображении φ на гиперповерхности семейства (18) с параметрами $c = -1$ и $c = 1$ соответственно.

Действительно, перенося на M свойства, описанные в упражнении 5.13, мы видим, что граница клетки E^n удовлетворяет всем требованиям нашей теоремы.

Чтобы проверить, что часть многообразия M, заключенная между M_a и M_b, после исключения клетки E^n допускает представление в виде $(M_a \setminus A) \times I$, нужно воспользоваться дугами семейства F', которые начинаются в $M_a \setminus A$ (и согласно предыдущему, кончаются в $M_b \setminus B$). Это завершает доказательство теоремы.

Дальнейшую информацию для более точного описания можно извлечь из упражнения 5.9; из результатов этого упражнения следует, что существуют сфера S^{r-1} на M_a и сфера S^{n-r-1} на M_b, такие, что все кривые семейства F', выходящие из $M_a \setminus S^{r-1}$, приходят в $M_b \setminus S^{n-r-1}$ (и наоборот), в то время как кривые семейства F', проходящие через S^{r-1} или S^{n-r-1}, все оканчиваются в точке P. Таким образом, M содержит две клетки E^r и E^{n-r}, края которых лежат на M_a и M_b соответственно и которые пересекаются в единственной точке — точке P.

Наконец отметим, что S^{r-1} имеет в M_a окрестность вида $S^{r-1} \times E^{n-r}$, а S^{n-r-1} — окрестность в M_b вида $S^{n-r-1} \times E^r$.

§ 6. СФЕРИЧЕСКИЕ ПЕРЕСТРОЙКИ

6.1. Введение

В этом параграфе мы рассмотрим изложенный в предыдущем параграфе материал с другой точки зрения. Отправным пунктом предыдущего параграфа было компактное гладкое многообразие M с краем $M_0 \cup M_1$. На M была задана гладкая функция f, или, что равносильно, было задано вложение многообразия M в евклидово пространство, и мы изучали окрестности критических и некритических уровней. Здесь же мы сконцентрируем наше внимание на том, как меняются многообразия уровней функции f, начиная с M_0 и кончая M_1.

В разделе 5.1 мы видели, что если c в своем изменении не проходит критического уровня, то многообразие M_c топологически не меняется. Поэтому, переходя от M_c к M_1 при помощи семейства уровней функции f, мы совершаем лишь конечное число операций, каждая из которых соответствует данному критическому уровню. Одна такая операция преобразует уровень M_a, лежащий непосредственно под критическим, в уровень M_b, расположенный непосредственно над этим критическим. Всякий раз она состоит в том, что мы выкидываем окрестность сферы, лежащей в M_a (окрестность A в обозначениях теоремы 5.1) и заменяем ее окрестностью сферы другой размерности (окрестностью B в тех же обозначениях). Исследование таких операций является основной целью настоящей главы.

6.2. Прямое вложение

Мы введем определения, которые, как уже отмечалось, полностью основываются на результатах, сформулированных в теореме 5.1; однако нам придется изменить обозначения. Рассматриваемое здесь многообразие M соответствует некритическому уровню функции f в теореме 5.1.

Итак, пусть M есть n-мерное гладкое многообразие, и пусть N — подмногообразие размерности r. Возьмем точку p на N и выберем локальную систему координат в окрестности этой точки, удовлетворяющую условиям определения 3.1. Предположим, что соответствующая координатная окрестность U (точнее, ее образ в евклидовом пространстве) определена неравенствами $|x_i| \leqslant \delta$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; тогда U можно считать топологическим произведением $V \times F$, где $V = U \cap N$ — окрестность точки p в N, а F — окрестность начала координат в $(n-r)$-мерном евклидовом пространстве с координатами $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, задаваемая неравенствами $|x_i| \leqslant \delta$, $i = r+1, \ldots, n$.

Множества вида $\{q\} \times F \subset V \times F$ представляют собой $(n-r)$-мерные клетки, каждая из которых пересекает многообразие N ровно в одной точке. Поэтому можно представлять себе U как объединение слоев, каждый из которых является $(n-r)$-мерной клеткой и пересекает многообразие N в одной точке. Объединение координатных окрестностей только что описанного типа мы будем называть трубчатой окрестностью подмногообразия N в M [1]). Можно показать (однако здесь нам это не понадобится), что трубчатую окрестность в целом можно представить как объединение $(n-r)$-мерных клеток, каждая из которых пересекает подмногообразие N в одной точке; другими словами, можно добиться того, чтобы слои в пересекающихся координатных окрестностях совпадали на пересечениях. Здесь нам особенно важен один случай — тот, в котором трубчатая окрестность N диффеоморфна произведению $N \times F$, где F есть $(n-r)$-мерная клетка.

Определение 6.1. При выполнении этого условия мы будем говорить, что многообразие N *прямо вложено* в M [2]).

---

[1]) Это довольно небрежная формулировка; точная формулировка имеется в [17], стр. 105. Она сводится к некоторому уточнению того, о чем говорит Уоллес в следующей фразе.— *Прим. ред.*

[2]) Кроме данной книги, я нигде не встречал такой терминологии. Читатель, проработавший книгу Милнора, поймет, что интересующее нас свойство означает, что N допускает оснащение в M (см. § 7), а также что N имеет тривиальное (т. е. сводящееся к прямому произведению) нормальное расслоение (см. задачу 11). Так обычно и говорят, но ввиду элементарности книги Уоллеса он вынужден был изобрести название попроще. — *Прим. ред.*

Примеры. 6.1. Пусть N — окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ в трехмерном евклидовом пространстве, а M — само трехмерное пространство. Окружность N, конечно, является подмногообразием в M. Пусть B — сплошной тор, средняя линия которого есть N (см. рис. 6.1). Пусть F — часть сечения тора B плоскостью $y = 0$, расположенная в полупространстве $x > 0$. Множество F представляет собой круг,

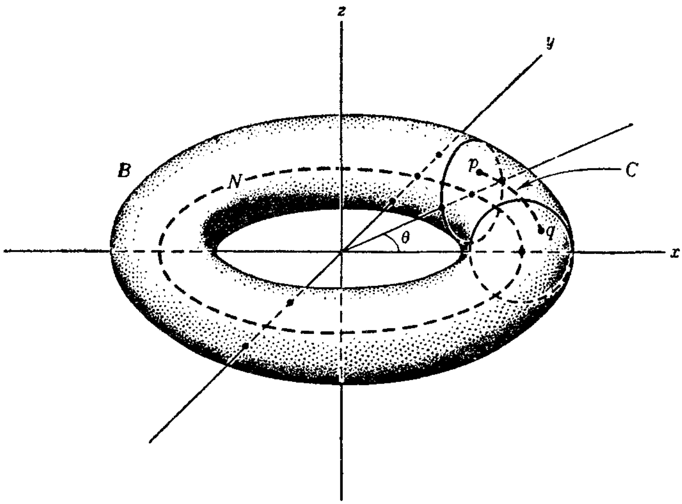


Рис. 6.1. Трубчатая окрестность окружности S^1 в E^3 как прямое произведение.

т. е. двумерную клетку. Теперь возьмем произвольную точку $p \in B$ и проведем плоскость через точку p и ось z. Эта плоскость образует некоторый угол θ с плоскостью (x, z). Его, конечно, можно принять за координату на N. Проведем через точку p окружность C, параллельную плоскости (x, y), и пусть $q \in F$ — точка, в которой C пересекает круг F. Нетрудно видеть, что так получается представление тора в виде произведения $N \times F$: точке p соответствует пара (θ, q). Следовательно, N прямо вложено в M.

6.2. Теперь мы приведем пример непрямо вложенного многообразия. Пусть M — проективная плоскость (пример 2.6). Мы видели, что это пространство можно представить как полусферу, у которой отождествляются противоположные точки края. В качестве N возьмем окружность, полученную склеиванием концов некоторой большой полуокружности на полусфере. Легко видеть, что N является подмногообразием в M.

Трубчатую окрестность B для N в M мы построим сначала на полусфере, где она будет полосой, средняя линия которой совпадает с N. Очевидно, B можно представить как объединение слоев, которые являются одномерными клетками и пересекают N: слоями являются дуги окружностей на полусфере, пересекающие N под прямым углом. Однако отождествление противоположных точек на границе означает, что для получения окрестности B мы перед склеиванием должны повернуть концы полосы друг относительно друга на полоборота. Поэтому B является листом Мёбиуса. Можно показать, что он не гомеоморфен произведению $N \times F$, где F — одномерная клетка. Поэтому вложение N в M не является прямым.

Последний пример иллюстрирует явление, которое заслуживает дальнейшего изучения и приводит к важному различию между двумя типами многообразий. Существование непрямого вложения (как в примере 6.2) означает, что когда мы, двигаясь вдоль окружности, возвращаемся в исходную точку, многообразие каким-то образом перекручивается. Так, окрестность окружности в примере 6.2 — это закрученная полоса. Такого закручивания не происходит, если каждая окружность на многообразии является прямо вложенной окружностью.

Определение 6.2. Пусть M — гладкое многообразие. Если каждая окружность, лежащая как подмногообразие в M, является прямо вложенным подмногообразием, то мы будем говорить, что многообразие M *ориентируемо*. В противном случае будем говорить, что M *неориентируемо*.

Это определение эквивалентно другим, чаще встречающимся в литературе[1]; однако оно больше подходит для наших целей, так как мы будем использовать понятие именно в таком виде.

Пример 6.3. Сфера ориентируема, а проективная плоскость — нет.

В параграфе 7 мы дадим полную классификацию двумерных компактных многообразий. А именно, каждое такое многообразие гомеоморфно либо сфере с некоторым числом p ручек, либо сфере с некоторым числом k дырок, в каждой из которых отождествлены диаметрально противоположные точки краев. Пример первого типа дает тор, для которого $p = 1$, а пример второго типа — проективная плоскость, для которой $k = 1$. Многообразия первого типа ориентируемы, а второго — неориентируемы. Второе

---

[1]) См. Милнор, стр. 211—212; эквивалентность явствует из сказанного в сноске на стр. 246.

Для дальнейшего полезно иметь представление также о связанной с этим понятием *ориентации*. Точное определение для общего случая см. у Милнора, стр. 211; мы ограничимся наглядным описанием для двух частных случаев — окружности и двумерного многообразия. Задать ориентацию на окружности — это значит принять одно из двух направлений обхода по ней за положительное. Задать ориентацию двумерного многообразия — это значит указать правило, которое для каждого маленького кружочка (лежащего на многообразии) устанавливает, какое направление вращения на ограничивающей его окружности считается положительным, причем требуется, чтобы при непрерывном перемещении кружочка по многообразию направление вращения не менялось.

Ориентируемое многообразие — это такое многообразие, на котором можно задать ориентацию. Если в непересекающихся окрестностях U_a и U_b двух разных точек a и b многообразия M мы задали какие-то ориентации, то в том случае, когда M ориентируемо, имеют смысл высказывания: «эти две ориентации совпадают», «эти две ориентации противоположны». Когда же M неориентируемо, эти высказывания не имеют смысла: если с целью сравнения ориентаций мы будем «передвигать» b к a, «тяня» вслед за b ее окрестность вместе с введенной там ориентацией, пока эта окрестность не пересечется с U_a (тогда ориентации можно будет сравнивать непосредственно), то результат будет зависеть от пути, по которому будет двигаться b. — *Прим. ред.*

утверждение доказать легко, так как дуга на сфере с k дырками, соединяющая диаметрально противоположные точки края одной из дырок, после отождествления превращается в непрямо вложенную окружность. Чтобы показать, что сфера с p ручками ориентируема, реализуем ее как поверхность в трехмерном пространстве (см. рисунки в параграфе 7), возьмем на ней окружность S, вложенную как подмногообразие, и рассмотрим трубчатую окрестность B этой окружности. Фиксируем на S какое-нибудь из двух направлений и выпустим из каждой точки S касательную прямую, отметив на ней это направление. Затем возьмем касательную к поверхности в точке p, которая перпендикулярна к S, и отметим на ней направление так, чтобы эта прямая вместе с направленной касательной и внешней нормалью к поверхности давала правостороннюю систему координат. Это определяет в каждой точке $p \in S$ положительное направление на перпендикуляре к S в B и тем самым превращает B в произведение $S \times I$.

Можно показать (но здесь мы этого делать не будем), что определение ориентируемости допускает формулировку в терминах локальных систем координат. Точнее, многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда существует такое его покрытие координатными окрестностями, что для любых двух пересекающихся окрестностей якобиан соответствующего преобразования координат положителен.

Упражнение 6.1. Покажите, что шесть координатных окрестностей на S^2 в примере 2.6 удовлетворяют приведенному выше условию, если координаты в каждой из этих окрестностей брать в должном порядке.

6.3. Определение перестроек

Сейчас мы определим понятие сферической перестройки. Пусть M есть n-мерное гладкое многообразие, и предположим, что S^r — некоторая r-мерная сфера, которая является прямо вложенным подмногообразием в M. Для краткости мы будем называть ее прямо вложенной сферой. Таким образом, S^r

имеет в M окрестность B, диффеоморфную произведению $S^r \times E^{n-r}$, где E^{n-r} есть $(n-r)$-мерная клетка. Тогда граница B есть многообразие $S^r \times S^{n-r-1}$, поэтому, выкидывая из M внутренность B, мы получаем многообразие с краем, причем край является произведением $S^r \times S^{n-r-1}$. С другой стороны, $S^r \times S^{n-r-1}$ является также краем многообразия $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Значит, можно составить объединение $M \setminus \operatorname{Int} B$ и $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, отождествив края, как объяснялось в разд. 2.7, причем это можно сделать так, чтобы в результате получилось гладкое многообразие M'.

Определение 6.3. Мы будем говорить, что M' получается из M *сферической перестройкой типа* r (r — это размерность сферы, окрестность которой удаляется из M) [1]).

Примеры. 6.4. Пусть M — двумерная сфера. Рассмотрим нульмерную сферу $S^0 \subset M$ (рис. 6.2). Она имеет окрестность, состоящую из двух непересекающихся кругов. Эту окрестность можно представить в виде $S^0 \times E^2$, так что вложение S^0 в M прямое. Обозначим ее через B. Тогда $M \setminus \operatorname{Int} B$ представляет собой сферу с двумя дырками. $E^1 \times S^1$ есть цилиндр, и если подклеить его края к окружностям, образованным краями дырок, то мы получим сферу с одной ручкой, то есть просто тор. Таким образом, тор получается из двумерной сферы сферической перестройкой типа 0.

6.5. Чтобы получить другой пример сферической перестройки, рассмотрим обратную операцию: пусть M — тор, а S^1 — окружность, изображенная на рис. 6.3. S^1 имеет окрестность в M вида $S^1 \times E^1$ — это опоясывающая тор полоса. После удаления внутренности этой полосы то, что осталось, имеет границу $S^1 \times S^0$. Такую же границу имеет пара непересекающихся кругов $E^2 \times S^0$, и если подклеить их по этой границе, то получится сфера M'. Таким образом,

---

1) Сферические ' рестройки называют также *перестройками Морса*. — *Прим. ред.*

сфера получается из тора сферической перестройкой типа 1.

Приведенные выше примеры перестраивания сферы в тор, а затем обратно в сферу иллюстрируют со-

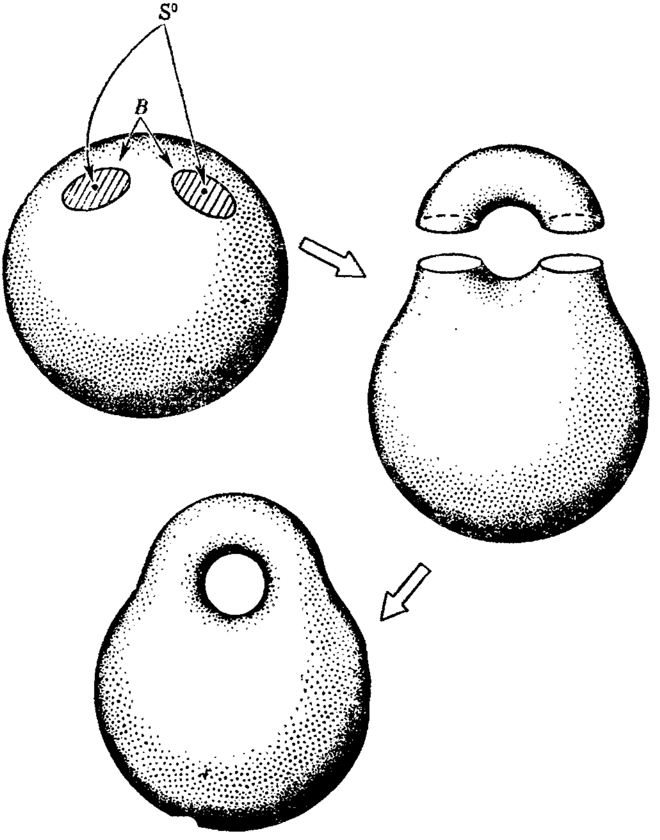


Рис. 6.2. Тор получается из сферы с помощью сферической перестройки.

вершенно общую ситуацию: если M' получается из M сферической перестройкой, то M тоже можно получить из M' сферической перестройкой. Действительно, предположим, что M' получится из M, если

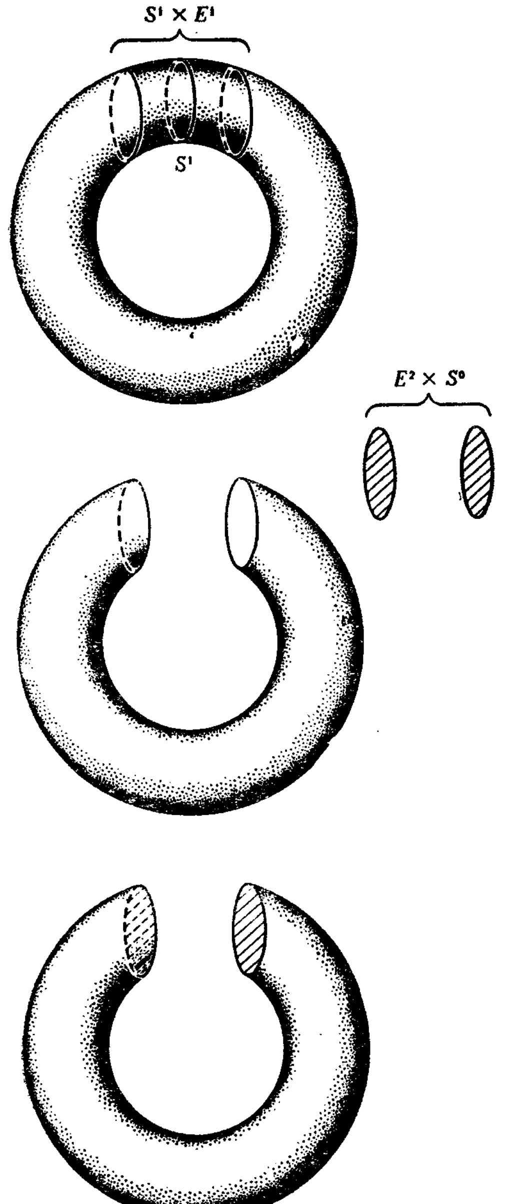


Рис. 6.3. Сфера (внизу) получается из тора (наверху) с помощью сферической перестройки. Сфера имеет вид изогнутого цилиндра, основания которого заклеены кругами.

удалить трубчатую окрестность $S^r \times E^{n-r}$ сферы S^r и заменить ее на $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. В этом случае $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ содержит сферу $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$, где p_0 — какая-то внутренняя точка клетки E^{r+1}. Отсюда следует, что M' содержит сферу $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$ и что эта сфера имеет в M' трубчатую окрестность $E^{r+1} \times \times S^{n-r-1}$; поэтому вложение этой сферы в M' прямое. Теперь для получения M из M' следует удалить трубчатую окрестность сферы $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$ и заменить ее на $S^r \times E^{n-r}$. Эта сферическая перестройка имеет тип $n - r - 1$.

Пример 6.6. Общий тип примеров можно извлечь из теоремы 5.1: если W — гладкое многообразие, а f — гладкая функция на W и если M и M' — многообразия уровня функции f, отделенные друг от друга лишь одним критическим уровнем, на котором лежит лишь одна и притом невырожденная критическая точка, то M' получается из M сферической перестройкой.

6.4. Пленка, реализующая перестройку

Пример 6.6 показывает, как, имея функцию с одной критической точкой, получить сферическую перестройку. Теперь мы покажем, что таким способом можно получить любую сферическую перестройку. Идея состоит в том, чтобы из пары многообразий, связанных между собой сферической перестройкой, соорудить многообразие с краем и построить на нем функцию, для которой исходные многообразия будут многообразиями уровня, разделенными одним критическим уровнем. Как это сделать, подсказывает наше знакомство с тем, как должна была бы выглядеть окрестность критического уровня.

Следующий пример даст нам ключ к пониманию конструкции в общем случае.

Пример 6.7. В примере 6.4 мы видели, что тор M_1 получается из сферы M_0 перестройкой типа 0. Удаляемое из M_0 множество $\operatorname{Int} B_0$ состоит из двух непересекающихся открытых кругов, так что

$M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0$ есть сфера с двумя отверстиями. Для наших целей удобнее представлять себе $M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0$ как поверхность цилиндра, которая изогнута дугой, как

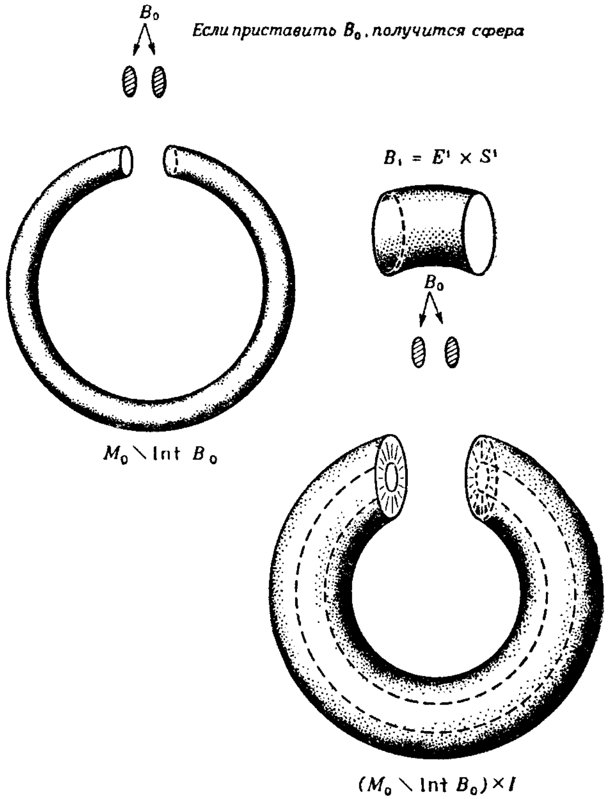
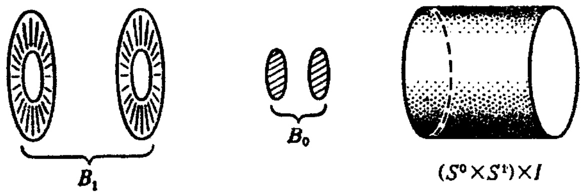


Рис. 6.4. При добавлении B_0 к внутренней поверхности изогнутого утолщенного цилиндра $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ получается сфера; при добавлении B_1 к его внешней поверхности получается тор.

показано на рис. 6.4. Тогда $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ будет утолщением поверхности цилиндра. Как показывает рис. 6.4, основания этого цилиндра составлены из радиальных отрезков, каждый из которых имеет вид

$\{p\}\times I$, где p лежит на границе множества $M_0\setminus\operatorname{Int}B_0$. Объединение оснований цилиндра можно, конечно, представить как $S^0\times S^1\times I$. Примем внутреннюю поверхность цилиндра, т. е. $(M_0\setminus\operatorname{Int}B_0)\times\{0\}$, за $M_0\setminus\operatorname{Int}B_0$, а внешнюю, т. е. $(M_0\setminus\operatorname{Int}B_0)\times\{1\}$, — за $M_1\setminus\operatorname{Int}B_1$. Множество B_0 состоит из двух кругов, в то время как B_1 представляет собой цилиндр $S^1\times E^1$. По-



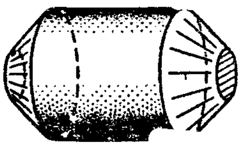


Рис. 6.5. Из множеств B_0, B_1 и $(S^0\times S^1)\times I$ (наверху) составлена двумерная сфера (внизу); она является краем трехмерной клетки.

этому внутренняя поверхность цилиндра $(M_0\setminus\operatorname{Int}B_0)\times\times I$ превращается в сферу, если возвратить на место B_0, а внешняя поверхность превращается в тор, если добавить к ней B_1.

Рассмотрим, с другой стороны, трехмерную клетку E^3 с границей S^2, которая разложена в объединение трех множеств $S^0\times E^2$, $S^1\times E^1$ и $S^0\times S^1\times I$; на самом деле это множества A, B и C из упражнения 5.12 (рис. 6.5). Заметим, что эти три множества можно отождествить соответственно с B_0, B_1 и основанием утолщенного цилиндра $(M_0\setminus\operatorname{Int}B_0)\times I$. При этом радиальные отрезки на основаниях цилиндра взаимно однозначно отождествляются с дугами больших кругов, из которых составляется множество $(S^0\times S^1)\times I$ на поверхности S^2. Поэтому, если отождествить множество $(S^0\times S^1)\times I$ на поверхности клетки E^3 с соответствующим множеством на основаниях утолщенного цилиндра, то получится сплошное тело M, причем B_0 и B_1 автоматически попадут на нужное место, образовав внутреннюю границу M_0 и внешнюю границу M_1.

Из этого построения вытекает дальнейшая информация. В упражнении 5.14 мы видели, что на трехмерной клетке E^3 существует гладкая функция f со следующими свойствами. На границе S^2 клетки E^3 функция принимает такие значения: 0 на множестве $B_0 = S^0 \times E^2$, 1 на множестве B_1 и t на подмножестве $(S^0 \times S^1) \times \{t\}$ множества $S^0 \times S^1 \times I$. В остальных точках клетки E^3 функция f принимает значения между 0 и 1, а в центре клетки она имеет свою единственную критическую точку. Ясно, что теперь можно продолжить функцию f на все многообразие M, полагая $f = t$ в точках множества $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \{t\}$ из $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$. Если $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ и E^3 уже подогнаны друг к другу так, что получилось гладкое многообразие, то f будет гладкой функцией, которая равна 0 на M_0, 1 на M_1 и имеет в точности одну невырожденную критическую точку в центре клетку E^3.

Теперь, имея перед собой этот пример, мы можем провести соответствующее построение в общем случае. Пусть M_0 — гладкое многообразие размерности n, и пусть M_1 получается из M_0 сферической перестройкой типа r. Эта перестройка производится путем удаления из M_0 множества B_0, диффеоморфного трубчатой окрестности $S^r \times E^{n-r}$ прямо вложенной сферы S^r, и последующей замены этого множества множеством $B_1 = E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Чтобы построить M, мы начнем, следуя образцу предыдущего примера, с произведения $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$. Часть границы этого произведения имеет вид $(S^r \times S^{n-r-1}) \times I$. С другой стороны, границу S^n n-мерной клетки E^{n+1} можно представить как объединение $A \cup B \cup C$ (см. упражнение 5.12), в котором $A = S^r \times E^{n-r}$, $B = E^{r+1} \times \times S^{n-r-1}$, а $C = (S^r \times S^{n-r-1}) \times I$. Образуем теперь объединение $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ и E^{n+1}, отождествляя подмножества $S^r \times S^{n-r-1} \times I$, которые встречаются в обоих слагаемых. Это автоматически возвратит на место $A = B_0$ в $M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0$, восстановив опять M_0, и вставит $B = B_1$ в $M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1$, образовав M_1, так что мы получим многообразие M, край которого есть несвязное объединение[1]) M_0 и M_1.

Далее, мы построим на M функцию f так же, как в трехмерном примере. Возьмем функцию f на клетке E^{n+1}, полученную в упражнении 5.14. На сфере, ограничивающей клетку E^{n+1}, имеем: $f = 0$ на A, $f = 1$ на B, а на C функция f принимает значение t на множестве $S^r \times S^{n-r-1} \times \{t\}$. Кроме того, f имеет ровно одну невырожденную критическую точку в центре клетки E^{n+1}. Тогда эту функцию можно продолжить на все многообразие M, полагая ее равной t на множестве $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \{t\}$ в $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$.

Если соединить $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ и E^{n+1} надлежащим образом, то M будет гладким многообразием, а f — гладкой функцией. На множестве $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \times I$ значение функции f совпадает со значением параметра t интервала I, а этот параметр всегда можно принять за одну из локальных координат, так что по лемме 4.3 функция f не имеет критических точек в этом множестве. Другими словами, имеется лишь одна невырожденная критическая точка индекса $r+1$ в центре клетки E^{n+1}.

В итоге мы получаем следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть M_1 получается из M_0 сферической перестройкой типа r. Тогда существует гладкое многообразие M, край которого есть несвязное объединение M_0 и M_1, и гладкая функция f на M, которая равна нулю на M_0 и единице на M_1; в остальных точках она принимает значения между* 0 *и* 1 *и имеет ровно одну невырожденную критическую точку индекса $r+1$.*

Повторное применение этой теоремы дает следующий результат:

---

[1]) Прилагательное «несвязное» призвано подчеркнуть, что M_0 и M_1 не пересекаются; тогда объединение, действительно, не может быть связным. — *Прим. ред.*

Теорема 6.2. *Пусть* M_1 *получается из* M_0 *конечным числом сферических перестроек. Тогда существует гладкое многообразие* M, *край которого является несвязным объединением* $M_0 \cup M_1$, *и гладкая функция* f *на* M, *которая равна* 0 *на* M_0, 1 *на* M_1, *в остальных точках принимает значения между* 0 *и* 1 *и имеет критические точки, соответствующие всем произведенным перестройкам.*

Определение 6.4. Построенное в этой теореме многообразие мы будем называть *пленкой, реализующей последовательность сферических перестроек*, превращающих M_0 в M_1.

Для удобства терминологии мы введем еще одно определение. Пусть перестройка ϕ, превратившая M_0 в M_1, состояла в удалении окрестности сферы S^r в M_0. Тогда, рассматривая на пленке, реализующей ϕ, ортогональные траектории семейства уровней соответствующей функции f (в обозначениях теоремы 6.1), мы видим, что те траектории, которые начинаются в точках сферы S^r, все кончаются в критической точке функции f (см. упражнение 5.8). Таким образом, когда мы идем от M_0 к M_1 по семейству уровней функции f, сфера S^r стягивается по ортогональным траекториям в точку, а затем, когда мы, пройдя критический уровень, продолжаем двигаться дальше, появляется сфера S^{n-r-1}, которая раздувается из критической точки вдоль ортогональных траекторий, пока не достигнет уровня M_1. Поэтому удобно говорить, что перестройка ϕ *стягивает* сферу S^r и что при этой перестройке *возникает* сфера S^{n-r-1}.

6.5. Бордантные многообразия

Содержание теоремы 6.2 можно выразить и по-другому — в терминах отношения между многообразиями, известного под названием *бордантности* [1]).

[1]) В терминологии имеется некоторый разнобой, о чем говорится в прим. ред. на стр. 232. Сам Уоллес пользуется редко употребляющимся термином «соограничивающие многообразия». — *Прим. ред.*

Определение 6.5. Два гладких компактных многообразия (без края) M_0 и M_1 называются *бордантными*, если существует гладкое компактное многообразие M (*«пленка»*), край которого есть несвязное объединение $M'_0 \cup M'_1$ двух многообразий, диффеоморфных многообразиям M_0 и M_1 соответственно. В частном случае, когда одно из исходных многообразий, скажем M_1, пусто, второе многообразие M_0 называется *бордантным нулю*, или *ограничивающим*. (Последнее, таким образом, означает, что оно диффеоморфно краю некоторого компактного гладкого многообразия.)

Примеры. 6.8. Всякое компактное гладкое многообразие без края M_0 бордантно самому себе (за M можно взять $M_0 \times I$).

6.9. Сфера S^n — ограничивающее многообразие, так как она является границей шара E^{n+1}.

6.10. Сфера с p ручками M_0 является ограничивающим многообразием, так как это граница шара с p сплошными ручками.

Эти примеры могут показаться довольно тривиальными; однако нетривиальный пример придумать нелегко. Вообще признак, позволяющий для пары многообразий определить, бордантны они или нет, очень сложен, и мы не будем приводить его здесь. Однако можно сформулировать следующий результат.

Теорема 6.3. *Компактные гладкие многообразия M_0 и M_1 бордантны тогда и только тогда, когда одно из них можно получить из другого конечным числом сферических перестроек.*

Доказательство. Если дано, что M_0 и M_1 бордантны, т. е. сказано, что их несвязное объединение[1]) есть край многообразия M, то по теореме 4.2 существует функция f на M, которая равна 0 и 1 на

[1]) Следовало бы сказать: «несвязное объединение некоторых многообразий, диффеоморфных M_0 и M_1»; из примера 6.8 видно, что иногда это существенно. Однако допущенная вольность речи является достаточно распространенной и следует привыкнуть правильно (не слишком буквально) понимать текст в подобных случаях. — *Прим. ред.*

M_0 и M_1 соответственно и имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и лежат на разных уровнях. Будем следить за множеством уровней M_c, увеличивая c от 0 до 1. Согласно упр. 5.4 и теореме 5.1, с уровнем M_c топологически ничего не происходит, если мы не проходим критический уровень, и происходит сферическая перестойка, когда мы его проходим. Последнее случается на всем пути от M_0 к M_1 лишь конечное число раз. Обратно, если M_1 получается из M_0 конечным числом сферических перестроек, то теорема 6.2 утверждает, что многообразия M_0 и M_1 бордантны.

6.6. Малые шевеления и изотопия

Если разобраться в определении сферической перестройки, то окажется, что результат этой операции зависит от сферы, которую мы стягиваем, а также от того, как представлена трубчатая окрестность этой сферы в виде произведения внутри данного многообразия. С другой стороны, первый шаг в конструкции перестройки состоял в удалении трубчатой окрестности сферы S^r. Поэтому, если бы другая сфера S_1^r имела бы ту же самую трубчатую окрестность, то результат перестройки получился бы один и тот же. Это произойдет, например, если сфера S_1^r получается из S^r небольшим смещением, таким, что S_1^r пересекает в одной точке каждую клетку-слой $\{x\}\times E^{n-r}$ произведения $S^r\times E^{n-r}$ (трубчатой окрестности S^r). В этом случае $S^r\times E^{n-r}$ автоматически выражается как $S_1^r\times E^{n-r}$, и поэтому получится та же самая перестройка, независимо от того, с какой сферы начать: с S^r или S_1^r. Точнее, результат M_1 перестройки, стягивающей S_1^r, будет тем же самым, что и результат перестройки, стягивающей S^r. Кроме того, нетрудно видеть, что обе эти перестройки реализуются одинаковыми пленками.

Заметим, что структура произведения на трубчатой окрестности сферы S_1^r определяется соответствующей структурой на окрестности S^r. Важно отметить, что даже в случае, когда S^r вообще не меняется, изменение структуры произведения на трубчатой окрестности может повлять на результат перестройки. Это обстоятельство иллюстрируется следующим простым примером.

Пример 6.11. Возьмем сферу S^2 и рассмотрим на ней 0-мерную сферу S^0, как в примере 6.4. На самом деле существуют два способа представить окрестность сферы S^0 в виде произведения $S^0 \times E^2$, каждый из которых получается из другого изменением направления вращения на одном из кругов[1]). Это

[1]) Пусть a, b — точка сферы S^0, U — ее трубчатая окрестность, $E^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, f: $S^0 \times E^2 \to U$ — диффеоморфизм. Если на круге E^2 выбрана ориентация, т. е. установлено, какое направление вращения считается положительным — скажем, против часовой стрелки, — то диффеоморфизм f переносит эту ориентацию на клетки

$$U_a = f(\{a\} \times E^2) \quad \text{и} \quad U_b = f(\{b\} \times E^2).$$

Но ведь можно взять и другой диффеоморфизм $g: S^0 \times E^2 \to U$, а именно

$$g(a, x, y) = f(a, x, y), \qquad g(b, x, y) = f(b, x, -y).$$

Он тоже переносит ориентацию круга E^2 на те же клетки. Клетка U_a будет ориентирована так же, как и раньше, но U_b — нет.

Ясно, что имеются еще две возможности. Однако читатель легко убедится, сделав соответствующий рисунок, что на результат перестройки влияет только, одинаково ли ориентированы U_a и U_b. Если ориентации U_a и U_b *противоположны*, то будем говорить, что перестройка *сохраняет ориентацию*, в противном случае — что она *не сохраняет ориентации*.

Происхождение этих названий ясно из таких примеров. В примере 6.11 перестройка, сохраняющая ориентацию, переводит сферу в тор, который ориентируем, а перестройка, не сохраняющая ориентации, — в неориентируемую бутылку Клейна. Другой пример — перестройки окружностей; см. стр. 139. Перестройки, названные там закручивающими, — как раз и есть те перестройки, которые мы сейчас назвали не сохраняющими ориентации. Они переводят окружность в окружность, т. е. ориентируемость при этом сохранится; но если на исходной окружности выбрать какое-то направление, то после перестройки на различных кусках новой окружности получатся разные направления, т. е. ориентация не сохраняется.

Заметим еще, что если перестраиваемое многообразие неориентируемо, то говорить о подобном различии между перестройками типа 0 не приходится, ибо на таком многообразии нельзя сравнивать ориентации, введенные в непересекающихся окрестностях U_a и U_b. — *Прим. ред.*

означает, что когда мы подклеиваем $S^1 \times E^1$, соответствующим образом отождествляя границы, то это отождествление можно произвести двумя способами. Первый (ориентируемый) способ описан в примере 6.4, и, применяя его, мы получим тор. Другой (неориентируемый) способ приведет к односторонней поверхности — бутылке Клейна (рис. 7.22).

Упражнения. 6.2. Пусть S^r — прямо вложенная в многообразие M сфера, и пусть B — ее трубчатая окрестность. Два представления B в виде произведения $S^r \times E^{n-r}$ определяют диффеоморфизм f окрестности B на себя. Он определяется тем, что переводит точку, которой при одном представлении B в виде произведения соответствует пара (p, q), в точку, которой при другом представлении отвечает та же пара (p, q). Докажите, что если f можно продолжить до диффеоморфизма многообразия M на себя, то перестройки, соответствующие двум разным представлениям, приведут к одному результату и реализуются одинаковыми пленками[1]).

6.3. Видоизменяя предыдущее упражнение, предположим, что S^r прямо вложена в M и что B_1 и B_2 — две трубчатые окрестности, каждая из которых представлена в виде произведения $S^r \times E^{n-r}$. Тогда аналогично упражнению 6.2 определяется отображение f окрестности B_1 на B_2. Докажите, что если f можно продолжить до диффеоморфизма многообразия M на себя, то перестройки M при помощи B_1 и B_2 приводят к одному результату и реализуются одной и той же пленкой.

6.4. Один частный случай предыдущего упражнения для нас особенно важен. Пусть S^r имеет трубчатые окрестности $B_1 \subset B_2 \subset \subset B_3$, где $B_i = S^r \times E_i$, $i = 1, 2, 3$, а E_i — шары с центром в начале координат некоторого $(n-r)$-мерного пространства, причем $E_1 \subset E_2 \subset E_3$. Постройте диффеоморфизм $(n-r)$-мерного пространства на себя, который тождествен вне E_3 и переводит E_2 в E_1.

(*Указание*: стройте отображение, двигая точки по радиусам к началу координат и определяя величину сдвига при помощи функции типа той, которая была описана в примере 2.4.)

Выведите отсюда, что существует диффеоморфизм многообразия M на себя, переводящий B_2 в B_1.

---

[1]) Вот точная формулировка того, что требуется доказать. Пусть при первой перестройке из M получается многообразие M_1, а W — пленка, реализующая эту перестройку; пусть при второй перестройке получается M_1', а W' — соответствующая пленка. Тогда существует такой диффеоморфизм $F: W \to W'$ этих пленок, что $F|M = f$. (Тем самым уже сказано, что M_1 и M_1' диффеоморфны). — *Прим. ред.*

С учетом упражнения 6.3 смысл упражнения 6.4 заключается в том, что, производя перестройку, стягивающую сферу S^r, мы можем брать трубчатую окрестность этой сферы сколь угодно малой.

Только что описанным результатам можно придать более общую формулировку, однако здесь мы не будем этим заниматься.

Наиболее важной для нас является ситуация, в которой прямо вложенные сферы S_1 и S_2 получились как образы двух изотопных отображений сферы S^r в M. Это можно понимать так, что сфера S_2 получается из S_1 посредством большого смещения, однако это большое смещение разлагается в последовательность малых смещений типа тех, которые описаны в начале этого раздела[1]). В этом случае можно показать, что заданная структура произведения на трубчатой окрестности сферы S_1 индуцирует структуру произведения на трубчатой окрестности сферы S_2, причем перестройки, которые соответствуют этим окрестностям и стягивают сферы S_1 и S_2, приводят к одному результату и реализуются одинаковыми пленками. Этот результат можно получить, например, последовательным применением соответствующего результата для малых шевелений.

Существует другое обстоятельство, которое требует изучения в связи с этим кругом вопросов: надо провести сравнение между пленками, реализующими две такие последовательности перестроек, что сферы, стягиваемые в одной последовательности, получаются из сфер, стягиваемых в другой, посредством малых шевелений. Следует отметить, что недостаточно рассматривать пленки, реализующие каждую отдельно взятую перестройку; надо также уделить внимание способу, которым они склеиваются, образуя две пленки, реализующие две последовательности перестроек.

Для наших целей достаточно рассмотреть следующий частный случай. Пусть ϕ — перестройка, которая превращает M_0 в M_1 и начинается с удаления трубча-

[1]) Точное определение изотопии см. у Милнора (стр. 206). — *Прим. ред.*

той окрестности B сферы S, прямо вложенной в M_0. Пусть ϕ' — вторая перестройка M_0, которая начинается с удаления трубчатой окрестности B' сферы S'. Предположим, что существует такое непрерывное отображение F: $M_0 \times I \to M_0$, что его ограничение на $M_0 \times \{0\}$ тождественно отображает M_0 в себя, его ограничение на $M_0 \times \{1\}$ переводит $B' \times \{1\}$ в B, сохраняя соответствующую структуру произведения, а его ограничение на множество $M_0 \times \{t\}$ для каждого t является гомеоморфизмом. Обозначим через g ограничение отображения F на множество $M_0 \times \{1\}$. Тогда, используя метод упражнения 6.3, мы получаем гомеоморфизм G пленки W, реализующей перестройку ϕ, на пленку W', реализующую перестройку ϕ', причем ограничение G на M_0 равно g^{-1}. Теперь мы хотим так подправить G, чтобы сделать его ограничение на M_0 тождественным отображением.

Для этой цели определим отображение H многообразия W' на себя следующим образом. Заметим, что, поскольку многообразие M_0 является некритическим уровнем функции на W' (теорема 6.2), оно имеет в W' окрестность вида $M_0 \times I$, где $M_0 \times \{0\}$ отождествляется с M_0 (упражнение 5.2). Определим отображение H, сказав, что вне этой окрестности оно тождественно, а внутри этой окрестности задано формулой

$$H(p, t) = (F(p, 1-t), t).$$

Мы видим, что $H(p, 1) = (F(p, 0), 1) = (p, 1)$, значит, определения отображения H в $M_0 \times I$ и вне $M_0 \times I$ согласованы и вместе определяют непрерывное отображение. Кроме того, наложенные на F условия обеспечивают, что H является гомеоморфизмом. Далее, $H(p, 0) = F(p, 1) = g(p)$. Таким образом, ограничение H на M_0 совпадает с g. Отсюда следует, что отображение HG является гомеоморфизмом многообразия W на W', ограничение которого на M_0 есть gg^{-1} = тождественное отображение.

Подведем итог:

Лемма 6.1. *Пусть ϕ и ϕ' — перестройки многообразия M_0, удовлетворяющие приведенным выше* *условиям. Тогда ϕ и ϕ' приводят к одному результату, а между реализующими их пленками существует гомеоморфизм, ограничение которого на M_0 является тождественным отображением.*

Теперь мы можем приложить это к последовательности перестроек. Пусть, например, к многообразию M_0 последовательно применяются две перестройки ϕ_1 и ϕ_2, причем перестройка ϕ_1 превращает M_0 в M_1, а перестройка ϕ_2 превращает M_1 в M_2. Предположим, далее, что ϕ_2 заменяется перестройкой ϕ_2', связанной с ϕ_2 так же, как ϕ' связана с ϕ в лемме 6.1. Обозначим пленки, реализующие перестройки ϕ_1, ϕ_2, ϕ_2' через W_1, W_2, W_2' соответственно. Тогда последовательность перестроек ϕ_1, ϕ_2 реализуется пленкой $W = W_1 \cup W_2$, а последовательность ϕ_1, ϕ_2' — пленкой $W' = W_1 \cup W_2'$, где в каждом объединении отождествляются точки M_1. Из леммы 6.1 сразу следует, что существует гомеоморфизм пленки W на W'; он даже тождествен на W_1.

Тот же способ можно применить к последовательности любого числа перестроек.

Упражнение 6.5. Пусть S — сфера, прямо вложенная в M_0, и пусть B — трубчатая окрестность сферы S, представленная в виде произведения $S \times E$. Пусть S' — вторая сфера, которая является подмногообразием в B, пересекающим каждый слой в B — клетку $s \times E$, $s \in S$, — по одной точке, а B' — трубчатая окрестность сферы S', которая содержится в B и каждый слой которой содержится в слое окрестности B. Докажите, что S, S', B, B' удовлетворяют условиям леммы 6.1. Результат этого упражнения будет существенным для перегруппировки перестроек в разд. 6.8.

6.7. Приведение в общее положение

Идею, положенную в основу этого раздела, совсем легко уловить интуитивно, однако детали доказательств слишком сложны, чтобы их здесь приводить. Поэтому понятие, которое мы вводим, будет лишь разъяснено на ряде примеров.

Сначала рассмотрим две кривые на плоскости, которые пересекаются в точке p. Если чуть-чуть сместить одну или другую кривую в плоскости, то смещенные кривые по-прежнему будут иметь точку пересечения вблизи p (см. рис. 6.6). С другой стороны, если одну кривую вывести из плоскости в трехмерное пространство, то пересечение пропадет. Пара кривых на плоскости, конечно, может иметь неизолированные точки пересечения. Однако если, например, две кривые имеют общую дугу, то малое смещение

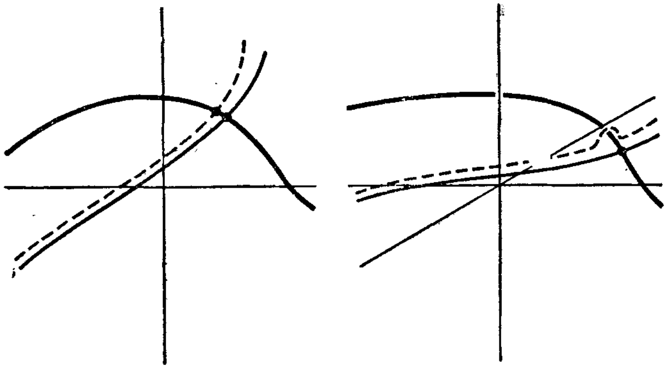


Рис. 6.6. Тонкая кривая при небольшом смещении в плоскости по-прежнему пересекает толстую кривую. Стоит ее приподнять в трехмерном пространстве, и пересечение исчезнет.

одной из них уже дает пару кривых с изолированными пересечениями (рис. 6.7). Иллюстрируемая здесь идея заключается в том, что две кривые в общем положении на плоскости имеют изолированные точки пересечения, в то время как в трехмерном пространстве они, находясь в общем положении, не имеют общих точек. Кроме того, пересечения кривых в трехмерном пространстве можно полностью устранить при помощи малых шевелений.

Чтобы увидеть, какую роль играет во всем этом размерность, следует представлять себе, что точки на плоскости имеют две степени свободы; чтобы зафиксировать точку, необходимо задать две ее координаты. Но точка на кривой имеет лишь одну степень свободы, так что условие лежать на кривой поглощает одну степень свободы. Условие лежать на двух кривых, таким образом, поглощает две степени свободы. Следовательно, в общем случае множество точек пересечения двух кривых не должно иметь ни одной степени свободы и потому должно состоять из изолированных точек. С другой стороны, точка в трехмерном пространстве имеет три степени свободы, в то время как если она обязана лежать на кривой, то

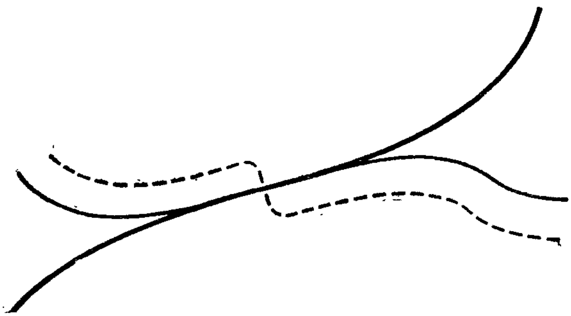


Рис. 6.7. Путем малого шевеления кривых на плоскости можно добиться, чтобы они пересекались в изолированных точках.

она будет иметь лишь одну степень свободы. Поэтому условие лежать на кривой в трехмерном пространстве поглощает две степени свободы. Условие лежать на двух кривых поглотит четыре степени свободы, но так как их на самом деле имеется только три, то две кривые общего положения в трехмерном пространстве вообще не обязаны пересекаться. Кроме того, разбор рисунков 6.6 и 6.7 убеждает нас в том, что приведение в общее положение в трехмерном пространстве может быть достигнуто посредством малых шевелений.

Теперь проведем аналогичные интуитивные рассуждения в более общей ситуации. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M и его r-мерное подмногообразие N. Точка многообразия M имеет n степеней свободы, но если она лежит в подмногообразии N, то их остается только r. Таким образом, условие лежать на N поглощает $n-r$ степеней свободы. Если N' — второе подмногообразие размерности r', то условие лежать как на N, так и на N' в общем случае должно было бы поглощать $n-r+n-r'$ степеней свободы. Если это число оказывается бо́льшим n, то следует ожидать, что пересечение будет пусто. Иначе говоря, два подмногообразия размерностей r и r', которые находятся в общем положении, при $r+r'<n$ не обязаны пересекаться. Кроме того, для любых двух подмногообразий N и N' должен быть верен тот факт, что их можно привести в общее положение малым шевелением одного из них. Здесь шевеление, скажем, многообразия N означает, что мы заменяем вложение $f\colon N \subsetneq M$ другим отображением $g\colon N \to M$, которое тоже является вложением (уже в смысле определения 3.2) и близко к f в том смысле, что $g(p)$ для всех p близко к $f(p)=p$ и производные функций, выражающих g и f в локальных координатах (ввиду компактности понадобится лишь конечное число координатных окрестностей), тоже будут близки.

6.8. Перегруппировка перестроек

Теперь мы применим результаты двух последних разделов к доказательству важной теоремы о последовательности перестроек. Первый шаг — показать, что при подходящих условиях две последовательные перестройки можно производить в обратном порядке.

Итак, пусть ϕ_1 — перестройка типа r, которая превращает данное компактное гладкое многообразие M_0 в M_1; пусть W_1 — пленка, реализующая ϕ_1, и пусть ϕ_2 — перестройка типа s, которая превращает M_1 в M_2 и реализуется пленкой W_2. Перестройки ϕ_1 и ϕ_2 стягивают сферы $S^r \subset M_0$ и $S^s \subset M_1$ в точки P_1 и P_2 многообразий W_1 и W_2 соответственно, при этом возникают сферы S^{n-r-1} и S^{n-s-1}.

Предположим, что $s \leqslant r$. Тогда, обращаясь к рассуждениям разд. 6.7, мы видим, что можно слегка пошевелить сферу S^s так, чтобы она не пересекала

S^{n-r-1}. Согласно упражнению 6.5, это шевеление сферы S^s можно сделать так, чтобы выполнялись условия леммы 6.1, и тогда оно не подействует ни на результат последовательности перестроек ϕ_1, ϕ_2, ни на реализующую пленку. Кроме того, теперь сферы S^s и S^{n-r-1}, не пересекаясь, имеют непересекающиеся окрестности. Так как перестройки можно производить с помощью сколь угодно малых трубчатых окрестностей (замечание после упражнения 6.4), то перестройку ϕ_2 и перестройку, обратную к ϕ_1, можно производить, используя непересекающиеся трубчатые окрестности сфер S^s и S^{n-r-1}, и это уменьшение трубчатых окрестностей до непересекающихся опять не повлияет ни на результат последовательности перестроек ϕ_1, ϕ_2, ни на реализующую ее пленку. Таким образом, мы доказали следующее:

Лемма 6.2. *Пусть ϕ_1 и ϕ_2 — перестройки, описанные в начале этого раздела. Тогда, не изменяя ни результата этой последовательности перестроек, ни реализующей ее пленки, можно добиться того, чтобы сфера S^s в M_1, стягиваемая перестройкой ϕ_2, не пересекалась со сферой S^{n-r-1}, возникающей при перестройке ϕ_1, и чтобы даже трубчатые окрестности этих сфер, соответствующие перестройке ϕ_2 и перестройке, обратной к ϕ_1, не пересекались.*

Из этой леммы мгновенно выводится следствие. Рассмотрим непересекающиеся трубчатые окрестности B_1 и B_2 сфер S^{n-r-1} и S^s, о которых шла речь в лемме. Множества B_2 и B_1 мы удаляем из M_1, начиная перестройку ϕ_2 и перестройку, обратную к ϕ_1, соответственно. Обратившись к построению пленки, реализующей перестройку, мы видим, что пленка W_1 есть объединение $(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1) \times I$ с $(n+1)$-мерной клеткой E_1, а W_2 есть объединение $(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_2) \times I$ с $(n+1)$-мерной клеткой E_2; в каждом случае сделаны надлежащие отождествления. Кроме того, $E_1 \cap M_1$ в точности равно B_1, а $E_2 \cap M_1$ равно B_2. Теперь легко видеть, что W_1 содержит множество $B_2 \times I$ как подмножество в $(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1) \times I$, в то время как W_2 содержит $B_1 \times I$ как подмножество в

$(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_2) \times I$. Наконец, объединение E_1 и $B_1 \times I$ по-прежнему является $(n+1)$-мерной клеткой E_1', пересекающей M_2 по множеству B_1', гомеоморфному $S^{n-r-1} \times E^{r+1}$, а объединение E_2 и $B_2 \times I$ является $(n+1)$-мерной клеткой E_2', которая пересекает M_0 по множеству B_2', гомеоморфному $S^s \times E^{n-s}$.

Упражнение 6.6. Проверьте то, что утверждается в предыдущем предложении.

Все это означает, что мы можем считать перестройки ϕ_1 и ϕ_2 производимыми одновременно в M_0. Точнее, если исключить из M_0 множества B_0 и B_2' и вставить на их место множества B_1' и $S^{n-s-1} \times \times E^{s+1}$, то (при надлежащих отождествлениях) получится M_2. Кроме того, пленка $W = W_1 \cup W_2$, реализующая пару перестроек ϕ_1, ϕ_2, получается добавлением клеток E_1' и E_2' к $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0 \setminus \operatorname{Int} B_2') \times I$ с надлежащими отождествлениями. Следовательно, по отношению к конечному результату и к построению пленки обе эти перестройки равноправны.

Заметим, что все это было сделано в предположении, что $s \leqslant r$. Последнее условие требовалось для того, чтобы можно было сделать сферы S^{n-r-1} и S^s в M_1 непересекающимися. Если бы эти сферы с самого начала были непересекающимися, то независимо от соотношения между r и s было бы справедливым то же самое заключение о равноправии ϕ_1 и ϕ_2.

Продолжая наши рассуждения, мы можем сказать, что поскольку перестройки ϕ_1 и ϕ_2 теперь находятся в равном положении, то порядок, в котором они производятся, можно поменять на обратный. Иначе говоря, мы можем сначала выполнить перестройку ϕ_2, а затем к полученному результату применить перестройку ϕ_1; конечный результат и пленка будут теми же, что и для последовательности ϕ_1, ϕ_2. Это завершает доказательство основной теоремы настоящего раздела.

Теорема 6.4. *Пусть M_2 получается из M_0 двумя последовательными перестройками, из которых первая ϕ_1 имеет тип r, а вторая ϕ_2 — тип s, причем $s \leqslant r$.*

Тогда то же самое многообразие M_2 можно получить, делая сначала перестройку типа s, а затем перестройку типа r, и пленка, реализующая эту последовательность перестроек, будет такой же, как и для исходной последовательности[1]).

Многократное применение этого результата дает следующую теорему.

Теорема 6.5. *Последовательность перестроек можно, не изменяя конечного результата и пленки, упорядочить так, чтобы перестройки типа s производились раньше, чем перестройки типа $r \geqslant s$.*

6.9. Интерпретация теоремы 6.5 в терминах критических точек

В этом параграфе мы не обращали внимания на гладкость многообразий и отображений, которые возникали в результате наших построений. Об этом следует позаботиться особо. Например, при построении пленки, реализующей перестройку, нужно складывать куски так, чтобы получилось гладкое многообразие. Мы уже отмечали, что это можно сделать, и в теореме 6.1 утверждалось без доказательства, что каждая перестройка типа r соответствует гладкой функции на пленке, имеющей критическую точку индекса[2]) $r+1$. Аналогично построение, проведенное в разд. 6.8 для перегруппировки перестроек, всегда может быть выполнено так, чтобы разные куски, складываясь, давали гладкое многообразие. Предпо-

---

[1]) Если же $s > r$, то перестройки ϕ_1 и ϕ_2, вообще говоря, не только нельзя переставить, но даже и не имеет смысла говорить о применении перестройки ϕ_2 к многообразию M_0. Ведь может случиться, что та сфера на многообразии M_1, которую эта перестройка должна стягивать, не соответствует никакой сфере на многообразии M_0 и появляется только после перестройки ϕ_1. (С одним примером такой ситуации мы будем иметь дело в разд. 8.2.) Исключение составляет упомянутый выше случай, когда эта сфера не пересекается со сферой, возникающей при перестройке ϕ_1. — *Прим. ред.*

[2]) Если функция f имеет в точке p на пленке минимум (критическая точка индекса 0), то перестройке многообразия уровня M_c приходится приписать тип -1. Она состоит в сл...ющем:

ложим теперь, что M есть гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, реализующее последовательность перестроек, превращающую M_0 в M_1, и пусть эта последовательность упорядочена так, как это описано в теореме 6.5. Тогда отсюда следует, что на M существует гладкая функция, которая принимает значения между 0 и 1, равна 0 на M_0, 1 на M_1 и имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и обладают тем свойством, что для двух таких точек P_1 и P_2 из того, что индекс точки P_1 меньше, чем индекс точки P_2, следует, что $f(p_1) < f(p_2)$. Функция с аналогичными свойствами описана в [33] под названием *хорошей* (nice) *функции* на M [1]).

§ 7. ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

7.1. Введение

В качестве иллюстрации развитых выше идей мы приведем сейчас классификацию двумерных многообразий (без края). При классическом подходе к этой задаче многообразия, заданные как симплициальные комплексы, приводятся к каноническим формам путем последовательных разрезов и склеиваний. Таким способом доказывается, что компактное связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, к которой приклеено некоторое число ручек, а компактное связное неориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, в которой прорезано некоторое число круглых дырок, после чего

у p имеется такая окрестность U на пленке, что $M_{f(p)-\varepsilon} \cap U = \varnothing$, а $M_{f(p)+\varepsilon} \cap U$ диффеоморфно сфере размерности $\dim M$. Иными словами, после перестройки к M добавляется не пересекающаяся с ним сфера. — *Прим. ред.*

[1]) Изложение этих вопросов с должным вниманием к гладкости содержится в первых четырех параграфах [24]. Оно там ведется с несколько иных позиций: упор делается не на сферические перестройки, а на реализующие их пленки и соответствующие функции (а также связанные с последними векторные поля). — *Прим. ред.*

отождествлены диаметрально противоположные пары точек окружности, образованной краями каждой из дырок. Число ручек в первом случае и число дырок во втором являются топологическими инвариантами поверхности. Сейчас мы получим эти результаты для гладких многообразий, изучая критические точки заданных на них функций. Ориентируемый и неориентируемый случаи будут разобраны отдельно.

7.2. Ориентируемые двумерные многообразия

Рассмотрим компактное связное ориентируемое двумерное многообразие M и построим на нем в соответствии с теоремой 4.2 функцию f с конечным числом невырожденных критических точек. В этом случае существует ровно три типа критических точек: минимум, седловая точка и максимум; они имеют индексы 0, 1, 2 соответственно, Теорема 6.5 показывает, что функцию f можно выбрать так, что ее значения в минимумах будут меньше, чем значения в седловых точках, а те в свою очередь будут меньше, чем значения в максимумах. Рис. 7.1 изображает многообразие M, лежащее в трехмерном пространстве; в качестве функции f взята последняя координата, и ее критические точки имеют только что описанное расположение. Между прочим, совсем не очевидно, хотя и верно, что многообразие M можно вложить в пространство размерности 3.

В соответствии с результатами параграфа 6 мы можем рассматривать многообразие M как пленку, реализующую последовательность перестроек одномерных многообразий. Каждый минимум соответствует возникновению окружности, так что, если мы рассматриваем семейство уровней функции f, поднимаясь вверх от самой нижней точки, то к тому моменту, когда мы пройдем все минимумы, у нас возникнет конечное число окружностей. После этого на одномерном многообразии, составленном из этих окружностей, производится некоторое число перестроек типа 0, соответствующих седловым точкам многообразия M. Наконец, производятся перестройки, соответствующие различным точкам максимума функции f; при этом в каждую точку максимума стягивается какая-то окружность.

Рассматривая сначала перестройки типа 0, легко видеть, что существует три типа таких перестроек; удобно назвать их *связывающей*, *разделяющей* и *закручивающей* перестройками. Проведение связывающей перестройки на уровне M_c уменьшает число компонент уровня $M_{c+\varepsilon}$ на 1 по сравнению с $M_{c-\varepsilon}$; при этом две окружности связываются в одну. Рисунок 7.2 изображает часть многообразия M, образованную соответствующей пленкой. Например, на рис. 7.1 перестройка, соответствующая критической точке P_1, является связывающей. Разделяющая перестройка действует в точности обратным способом (рис. 7.3). На рис. 7.1, например, перестройка, соответствующая точке Q, является разделяющей.

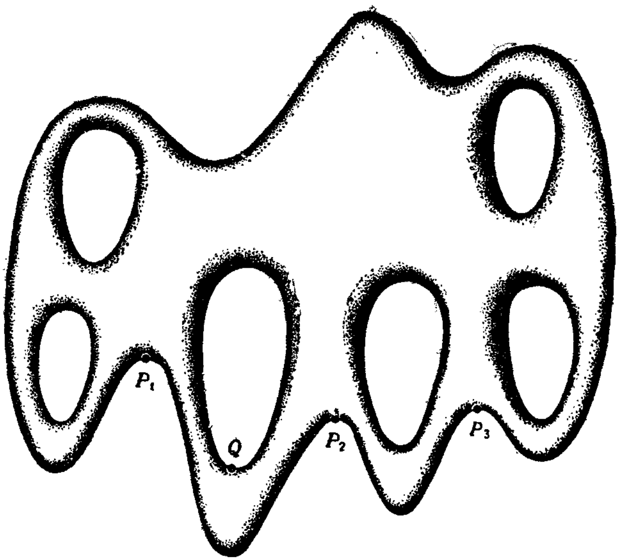


Рис. 7.1.

Третий тип перестройки типа 0 стягивает нульмерную сферу на окружности (рис. 7.4), однако на этот раз окружность в окрестности одной из точек

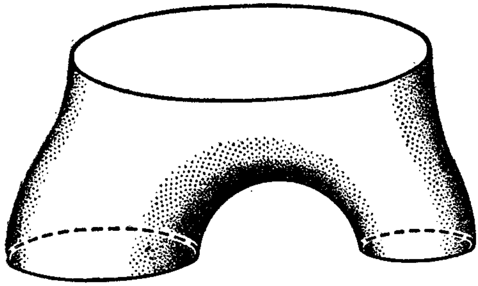


Рис. 7.2.

нульмерной сферы закручена (рис. 7.5). Результат перестройки по-прежнему представляет собой окруж-

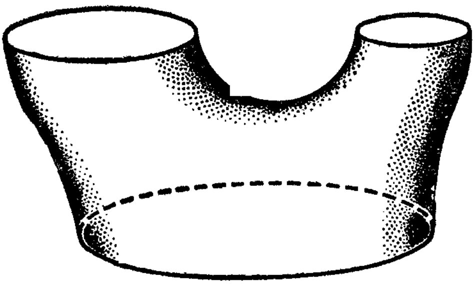
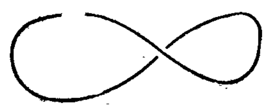


Рис. 7.3.

ность (рис. 7.6)[1]. Закручивание окружности при перестройке этого типа означает, что кривые уров-

[1]) Закручивание на рис. 7.5 продиктовано интересами описания пленки (см. ниже); саму же перестройку проще представлять себе так: от рис. 7.4 переходим к 

— *Прим. ред.*

ней соответствующей функции не являются плоскими кривыми, и поэтому пленку, реализующую перестройку, нельзя поместить в трехмерном евклидовом пространстве без самопересечений [1]).

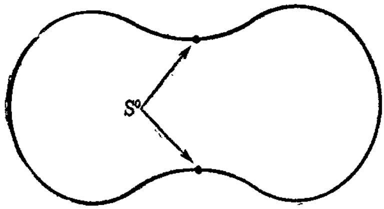


Рис. 7.4.

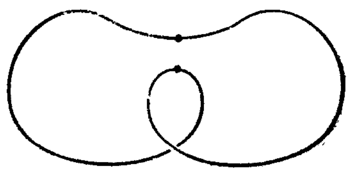


Рис. 7.5.

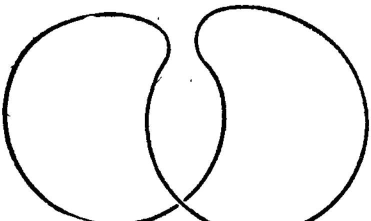


Рис. 7.6.

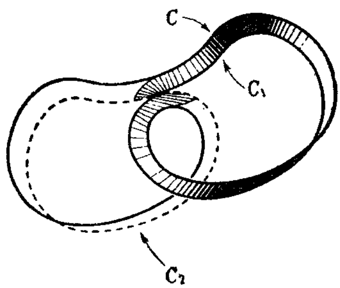


Рис. 7.7.

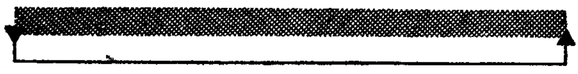


Рис. 7.8.

Рассмотрим теперь пленку W, реализующую перестройку, изображенную на рис. 7.4, 7.5 и 7.6. На W имеется функция с одной критической точкой P. Соответствующий критический уровень состоит из

[1]) Речь идет о таком вложении в трехмерное евклидово пространство E, при котором функцией является одна из координат. Вообще же вложить в E пленку без самопересечений можно, ибо она диффеоморфна листу Мёбиуса (см. Милнор, рис. 17), в котором вырезана дырка. — *Прим. ред.*

двух окружностей C_1 и C_2, пересекающихся в точке (рис. 7.7). Третья окружность C на рис. 7.7 изображает некритический уровень функции f, расположенный ниже точки P; другими словами, это та окружность, на которой производится закручивающая перестройка. Заштрихованная полоса на рис. 7.7 изображает часть W, в основном заключенную между C и C_1. На рис. 7.8 представлен прямоугольник, концы которого отождествляются так, как указывают стрелки; в результате получается лист Мёбиуса. Заштрихованную полосу на W из рис. 7.7 можно отобразить на заштрихованную часть листа Мёбиуса, отождествляя C_1 со средней линией полосы, а изображенные на рис. 7.7 дуги на W — с вертикальными отрезками прямоугольника на рис. 7.8. Точно так же можно отождествить и вторую половину листа Мёбиуса с частью W, в основном заключенной между окружностью C_1 и некритическим уровнем функции f, расположенным выше точки P. Таким образом, C_1 имеет в W окрестность, которая является листом Мёбиуса. Тем самым C_1 не прямо вложена в W, и потому W — неориентируемое многообразие. Мы же разбираем сейчас случай ориентируемых многообразий, так что все перестройки типа 0 будут либо связывающими, либо разделяющими.

Пусть теперь $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ — уровень функции f, расположенный над всеми минимумами. Этот уровень является тем одномерным многообразием, к которому будут применяться перестройки типа 0. Допустим на минуту, что перестройки типа 0 можно разбить на две группы так, что перестройки одной из них будут действовать только на $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{n-1}$, а перестройки другой будут производиться на C_n. Тогда две пленки, реализующие эти две последовательности перестроек, с добавленными сверху и снизу клетками будут двумерными многообразиями, объединение которых равно M, а это противоречит связности многообразия M. Поэтому обязательно найдется перестройка, стягивающая нульмерную сферу, одна точка которой лежит на окружности C_n, а другая — на одной из окружностей C_i. Эта перестройка будет связывающего типа. Переставим перестройки типа 0 так, чтобы она шла первой. Тогда остальные перестройки типа 0 действуют уже на объединении $n-1$ окружностей. Повторяя это рассуждение, мы видим, что данную последовательность перестроек можно упорядочить так, чтобы первые $n-1$ из них соединяли n окружностей C_i в одну

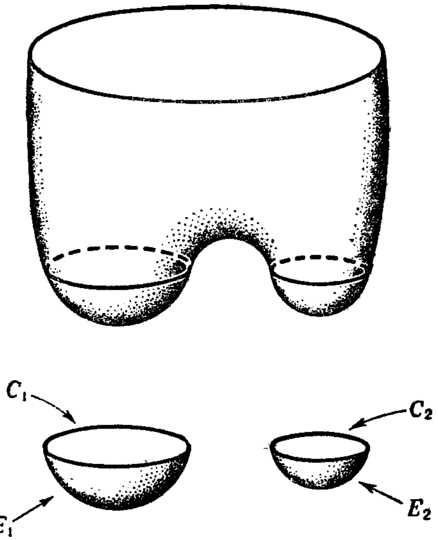


Рис. 7.9.

окружность C_0. Геометрически это означает, что седловые точки P_i на рис. 7.1 мы перетянули вниз так, чтобы они оказались ниже остальных седловых точек.

Далее, любые две из упомянутых выше окружностей C_i, скажем C_1 и C_2, являются границами двумерных клеток E_1 и E_2, лежащих в M. Если C_1 и C_2 соединяются связывающей перестройкой, то получившаяся окружность также ограничивает двумерную клетку (рис. 7.9), образованную добавлением клеток E_1 и E_2 к пленке, реализующей перестройку. Повторяя это рассуждение $n-1$ раз, мы видим, что часть многообразия M, расположенная под окружностью

C_0, представляет собой двумерную клетку E_0. Теперь мы можем заменить f новой функцией, у которой кривые уровней выше C_0 те же, что и прежде, а кривые уровней ниже C_0 образуют семейство окружностей, стягивающихся в точку на E_0. Другими словами, функция f будет иметь на M ровно один минимум.

Аналогичное рассуждение позволяет подправить функцию f так, чтобы она имела на M ровно один максимум. Итак, мы получили следующее:

Лемма 7.1. *На связном компактном ориентируемом двумерном многообразии существует функция, все критические точки которой, кроме одного минимума и одного максимума, являются седловыми.*

Выраженная в других терминах, эта лемма утверждает, что многообразие M получается добавлением сверху и снизу клеток E_1 и E_0 к пленке, реализующей последовательность перестроек типа 0, которая начинается с окружности C_0 и кончается окружностью C_1. В тех же терминах выражается наш следующий шаг: мы переставляем перестройки этой последовательности так, чтобы все разделяющие перестройки производились раньше других[1]).

Рассмотрим теперь клетку E_0 (рис. 7.10), гомеоморфную двумерной сфере с отверстием, край которого есть окружность C_0. Если мы делаем с C_0 разделяющую перестройку и добавляем к E_0 соответствующую пленку, то получается сфера с двумя отверстиями. Продолжая по индукции, мы видим, что если добавляется пленка, реализующая $k-1$ разделяющих перестроек, то в результате получается сфера M_1 с k дырками, края которых мы обозначим, например, через $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$. Остальная часть M_2 многообразия M получается как пленка, реализующая действующие на объединение окружностей Γ_i

[1]) Убедиться в возможности такой перегруппировки перестроек читателю предоставляется самостоятельно. Формально это не совсем тривиально, ибо не исключено, что при изменении порядка перестройка, бывшая ранее связывающей, может стать разделяющей. Наглядно это соответствует переходу от рис. 7.10 к 7.11 (C_i на них имеют различный смысл). — *Прим. ред.*

язывающие перестройки, к которой «сверху» добавлена еще клетка E_1. Однако перестройки, которые были связывающими при движении от C_0 к C_1, станут разделяющими, если двигаться от C_1 к C_0. По-

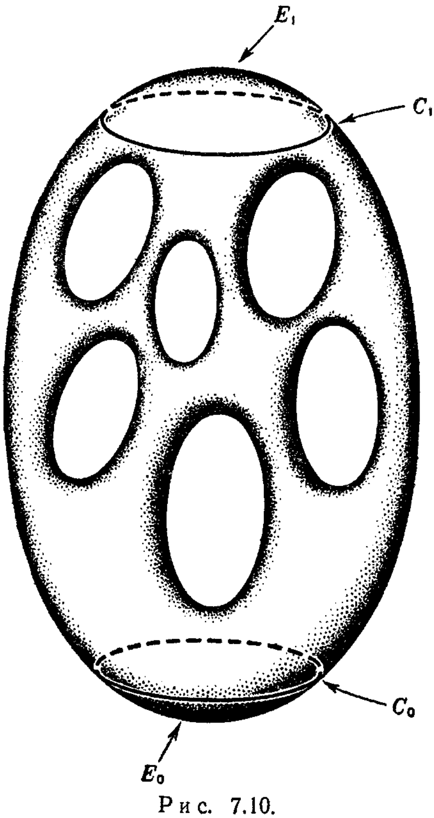


Рис. 7.10.

этому M_2 также является сферой с k дырками. Многообразие M теперь получается объединением M_1 и M_2 с попарным отождествлением краев отверстий. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Лемма 7.2. *Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие* (*без края*) *гомеоморфно многообразию* $M(k)$, *где* $M(k)$ *есть объединение двух сфер, в каждой из которых проделано* k *дырок, после чего края этих дырок попарно отождествлены* (рис. 7.11).

Лемма дает нам такую последовательность многообразий $M(k)$, что любое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно

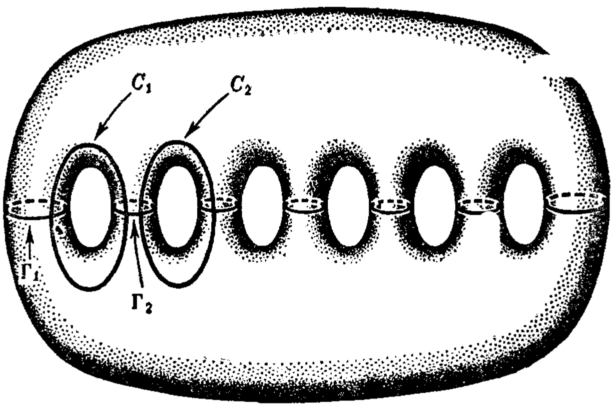


Рис. 7.11.

одному из них. Но чтобы эту лемму можно было считать классификационной теоремой, нужно еще показать, что при $h \neq k$ многообразия $M(h)$ и $M(k)$ не гомеоморфны. Однако многообразия $M(k)$ представлены не в нормальной форме, обычно используемой для классификации двумерных многообразий, и п этому сначала мы должны придать лемме 7.2 общепринятую формулировку.

Чтобы сделать это, взглянем на $M(k)$ с другой точки зрения: предположим, что на $M(k)$ нарисовано $k-1$ окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$, как показано на рис. 7.11. Если разрезать $M(k)$ на две сферы, каждая с k дырками, края которых образованы окружностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, то на каждой сфере останется набор дуг, в котором i-я дуга соединяет точку на Γ_i

с точкой на Γ_{i+1}, причем окружность C_i получается при объединении i-й дуги на одной сфере с i-й дугой на другой сфере. Окружности C_i прямо вложены в $M(k)$, и если сделать перестройки, стягивающие эти окружности, то получится двумерная сфера. Рассуждая в обратном порядке, мы видим, что $M(k)$ получается в результате проведения $k-1$ перестроек типа 0 на двумерной сфере, причем все они сохраняют ориентацию (пример 6.11). Действие каждой такой перестройки заключается в приклеивании к сфере одной ручки (рис. 6.2). Поэтому если обозначить через Σ_p двумерную сферу с p ручками, то $M(k)$ будет гомеоморфно Σ_{k-1}.

После подходящей перемены обозначений лемма 7.2 принимает следующий вид:

Лемма 7.3. *Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие (без края) гомеоморфно поверхности Σ_p, где Σ_p — сфера с p ручками.*

Упражнение 7.1. Дайте другое доказательство того, что $M(k)$ гомеоморфно Σ_{k-1}, применив к Σ_{k-1} последовательность шагов из доказательств лемм 7.1 и 7.2 и приведя тем самым Σ_{k-1} к виду $M(k)$.

Теперь нам осталось сделать последний шаг — показать, что Σ_p и Σ_q не гомеоморфны, если $p \neq q$.

Сначала заметим, что на Σ_p имеется p непересекающихся окружностей, по одной на каждой ручке (рис. 7.12), таких, что если разрезать Σ_p по каждой из них, то получившаяся поверхность[1]) будет попрежнему связной. Максимальное число обладающих этим свойством непересекающихся окружностей на поверхности, очевидно, является ее топологическим инвариантом.

Определение 7.1. Максимальное число непересекающихся окружностей, по которым можно разрезать поверхность, не нарушая ее связности, называется *родом* этой поверхности.

---

[1]) Здесь и далее слово «поверхность» употребляется вместо «двумерного многообразия». — *Прим. ред.*

Имеется теорема, которую мы здесь доказывать не будем и которая утверждает, что род двумерного компактного многообразия конечен и, в частности, род сферы равен нулю (см. [46]). Эта теорема по-

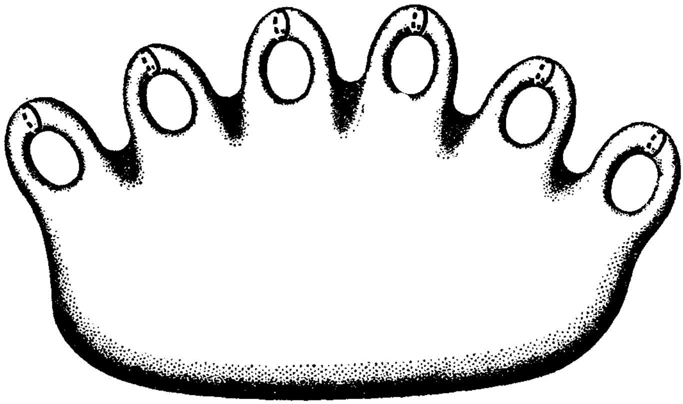


Рис. 7.12.

требуется нам в дальнейших рассуждениях. Доказательство того, что Σ_p и Σ_q не гомеоморфны при $p \neq q$, — это, по существу, доказательство того, что род Σ_p р вен p[1]).

Лемма 7.4. *Пусть связная поверхность M' получается из M перестройкой типа 0. Тогда род многообразия M' больше, чем род M.*

[1]) Вместо рода можно воспользоваться другим топологическим инвариантом — эйлеровой характеристикой. См. Милнор, задача 25* (заодно там доказана и конечность рода). Утверждение, что замкнутая кривая без самопересечений на сфере разбивает последнюю, равносильно аналогичному утверждению для плоскости (для перехода от одного к другому можно воспользоваться стереографической проекцией (Милнор, рис. 3), взяв за полюс сферы любую ее точку, лежащую вне рассматриваемой кривой). А оно является одним из утверждений теоремы Жордана, доказанной, например, у Дьедонне ([13], добавление к гл. 9). Для гладкой кривой оно легко доказывается с помощью методов, излагаемых у Милнора (см. задачу 26*); перехода к произвольным замкнутым кривым требуются неко ухищрения. — *Прим. ред.*

Доказательство. Пусть род M равен p, и пусть C_1, C_2, ..., C_p — непересекающиеся окружности на M, такие, что после разрезания вдоль этих

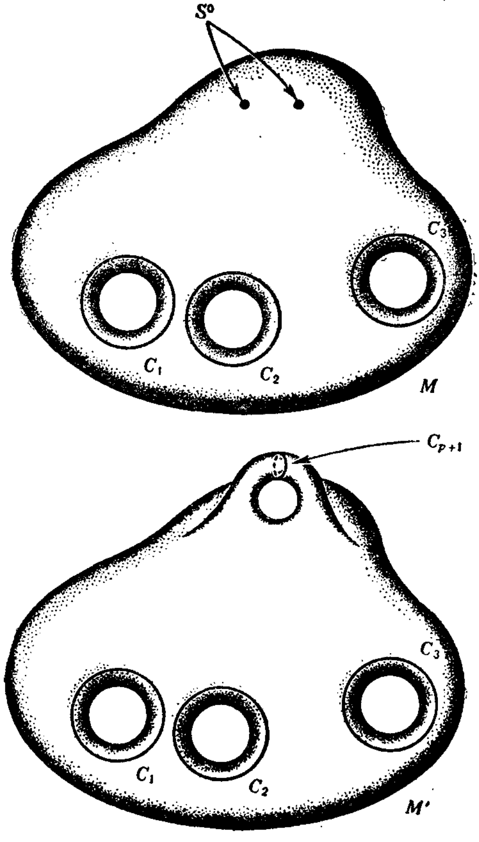


Рис. 7.13.

окружностей поверхность M остается связной. Можно считать (см. лемму 6.1), что нульмерная сфера, стягиваемая при переходе от M к M', не пересекает окружностей C_i. Тогда окружности C_1, ..., C_p «перекочуют» на M' (рис. 7.13); кроме них, на M' имеется окружность C_{p+1}, которая опоясывает приклеенную ручку. Она не пересекает окружностей $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_p$, и если мы разрежем M' по $C_1, C_2, \ldots, C_{p+1}$, то связность не нарушится. Следовательно, род M' по меньшей мере равен $p+1$, что строго больше, нежели род M.

Повторное применение этой леммы дает следующий результат:

Лемма 7.5. *Пусть род M равен p, и пусть многообразие M' получается из M проведением p перестроек типа 1 и является связным. Тогда M' — сфера.*

Доказательство. Рассмотрим многообразия, получающиеся из M при последовательном применении упомянутых перестроек. Все они связны, ибо M' связно, а перестройка типа 1 не может превратить несвязное многообразие в связное. Теперь из леммы 7.4 следует, что каждая из перестроек, преобразующих M в M', уменьшает род по крайней мере на 1. Поэтому после p перестроек род должен оказаться равным нулю. Но получившаяся поверхность M' должна быть сферой с некоторым числом q ручек, и поскольку ее род равен нулю, q должно равняться нулю. Таким образом, M' есть сфера.

Замечание. На поверхности рода p имеются p непересекающихся окружностей, разрез по которым не нарушает связности; значит, и при перестройках типа 1, стягивающих эти окружности, связность не нарушится. По доказанной лемме при этом должна получиться сфера. Рассматривая перестройки, ведущие от M к сфере, в обратном порядке, получаем, что поверхность M рода p должна быть гомеоморфна сфере с p ручками[1]). Впрочем, сейчас нам понадо-

[1]) Обратите внимание, что это еще не дает нам полной классификации: мы теперь знаем, что если существует ориентируемая поверхность, имеющая род p, то и Σ_p имеет род p (род топологически инвариантен!), но мы еще не выяснили — быть может, для некоторых p поверхностей с родом p вообще нет? В частности, всегда ли род Σ_p равен p? Или, что эквивалентно, не могут ли быть гомеоморфны некоторые Σ_p и Σ_q с $p \neq q$? Все это и выясняется в оставшейся части данного раздела. — *Прим. ред.*

бится только следующее: для всякой ориентируемой поверхности M существует некоторое конечное число (равное на самом деле ее роду p) с тем свойством, что при применении к M бо́льшего числа перестроек типа 1 получится несвязное многообразие (если предположить противное, то первые p перестроек должны привести к сфере, а после этого следующая же перестройка нарушит связность, ибо род сферы равен 0).

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 7.1. *Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие (без края) гомеоморфно одной из поверхностей Σ_p; при этом Σ_p и Σ_q не гомеоморфны, если $p \neq q$.*

Доказательство. Первая часть была доказана в лемме 7.3. Предположим теперь, что Σ_p гомеоморфна Σ_q с $q > p$. На поверхности Σ_q можно провести $q - p$ последовательных перестроек типа 1, стягивающих окружности, которые опоясывают $q - p$ ее ручек; в результате мы получим поверхность Σ_p. Но так как мы предположили, что Σ_p и Σ_q гомеоморфны, то мы можем считать, что эти перестройки проводились на Σ_p и в результате тоже получилось Σ_p.

Повторное проведение этих перестроек привело бы к сколь угодно длинной последовательности перестроек типа 1, примененных к Σ_p и оставляющих ее связной. Это противоречит сделанному выше замечанию, согласно которому каждое компактное ориентируемое двумерное многообразие после некоторого конечного числа перестроек типа 1 перестает быть связным. Следовательно, Σ_p и Σ_q не могут быть гомеоморфными.

Упражнения. 7.2. Докажите, что если на Σ_p приводится перестройка типа 1, то ее результат, если он связен, будет поверхностью Σ_q с $q < p$.

(*Указание.* Предположив, что $q \geqslant p$, постройте на Σ_p сколь угодно длинную последовательность перестроек типа 1, оставляющую эту поверхность связной.)

7.3. Докажите, что род Σ_p равен p. (Ясно, что род Σ_p не меньше p. Предположим, что он больше p. Используя последнее упражнение, постройте посл..овательность перестроек, которая превращает поверхность Σ_p в сферу, но оставляет строго положительным ее род.)

7.3. Неориентируемый случай

Прежде чем рассматривать неориентируемые поверхности в общем случае, полезно разобрать простой пример, чтобы получить представление, как действует закручивающая перестройка (рис. 7.4, 7.5, 7.6). Рассмотрим проективную плоскость; ее можно представить как сферу, у которой отождествлены пары диаметрально противоположных точек. Таким образом, если мы возьмем единичную сферу $x^2+y^2+z^2=1$ в трехмерном евклидовом пространстве, то точку (x, y, z) надо отождествить с точкой $(-x, -y, -z)$. Так как функция

$$(*) \qquad f(x, y, z) = x^2+2y^2+3z^2$$

принимает одинаковые значения в точках (x, y, z) и $(-x, -y, -z)$, то формула $(*)$ определяет функцию f на проективной плоскости. Теперь мы можем делать выводы о поведении линий уровня функции f на проективной плоскости, исследуя уровни функции $x^2+2y^2+3z^2$ на сфере и помня о том, что пары противоположных точек отождествляются.

Линии уровня на сфере — это пересечения сферы с семейством эллипсоидов:

$$x^2+2y^2+3z^2=c.$$

Ясно, что при $c<1$ действительных пересечений нет. При $c=1$ имеется две точки пересечения: $(\pm 1, 0, 0)$ (рис. 7.14). Они, разумеется, определяют одну точку P_0 на проективной плоскости, которая соответствует минимуму функции f. Пока c возрастает от 1 до 2, пересечение представляет собой пару овалов на сфере (рис. 7.15). Отождествление противоположных точек означает, что на проективной плоскости это будет одна окружность. При $c=2$ пересечение эллипсоида и сферы устроено так, как это показано на рис. 7.16. При этом функция f имеет критические точки

$(0, \pm 1, 0)$, которые опять определяют одну точку P_1 на проективной плоскости. Когда c возрастает от 2 до 3, пересечение сферы и эллипсоида снова представляет собой пару окружностей, как на рис. 7.17, и

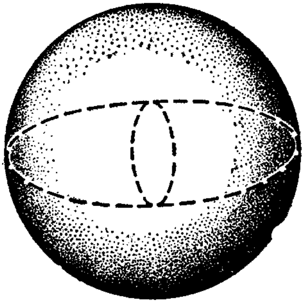


Рис. 7.14.

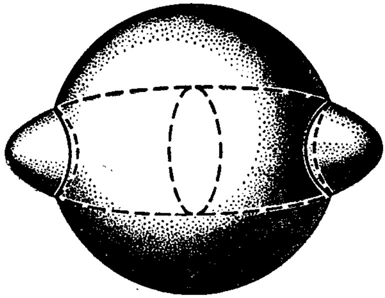


Рис. 7.15.

снова они определяют одну окружность на проективной плоскости. Когда c стремится к 3, эти окружности стягиваются в точки $(0, 0, \pm 1)$ на сфере, определяющие одну точку P_2 на проективной плоскости.

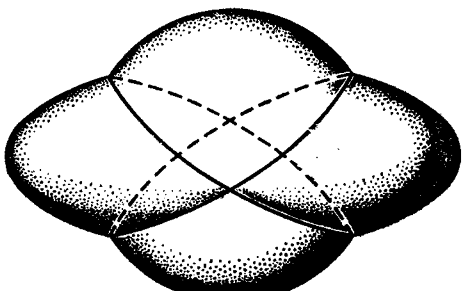


Рис. 7.16.

Для детального изучения перехода через критический уровень, соответствующий точке P_1, мы заметим, что проективную плоскость можно рассматривать как полусферу $y \leqslant 0$ единичной сферы, если отождествить противоположные точки окружности, образованной краями полусферы. На рис. 7.18 полусфера для удобства сплющена в круг. Этот рисунок изображает критический уровень функции f, соответствую-

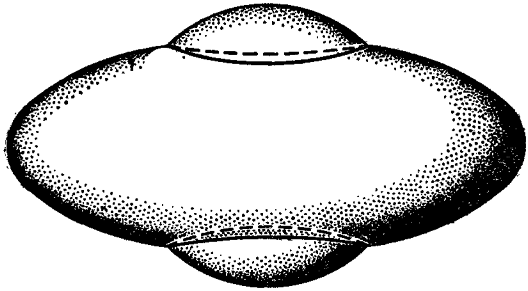


Рис. 7.17.

щий точке P_1, а также некритические уровни с обеих сторон от него. Дуги a и b образуют некритический уровень ниже P_1, а дуги c и d — выше. Противоположные точки на границе круга, обозначенные одинаковыми буквами, отождествляются. Стрелки на дугах a и b показывают некоторое направление вращения на нижнем уровне функции f; видно, что около точки P_1 линии уровня идут в одном направлении. Сравнение этого рисунка с рис. 7.5 показывает, что

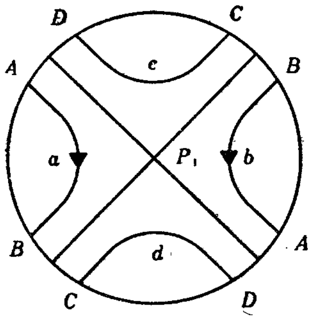


Рис. 7.18.

при переходе от нижнего критического уровня к верхнему происходит закручивающая перестройка.

Эту ситуацию можно описать по-другому, сказав, что пленка, реализующая закручивающую перестройку, — это проективная плоскость, в которой вырезаны две дырки. Таким образом, последовательность k закручивающих перестроек реализуется такой пленкой: надо взять k проективных плоскостей, в каждой из которых прорезано по две дырки, и отождествить края одной дырки в каждой из плоскостей с краями дырки в следующей плоскости.

Последнее построение можно описать в других, более удобных терминах. Пусть M_1 и M_2 — два связных многообразия одинаковой размерности[1]. Возьмем точки P_1 и P_2 на M_1 и M_2 соответственно и выберем их окрестности U_1 и U_2, которые являются клетками. Выкинем эти окрестности и образуем объединение множеств $M_1 \setminus U_1$ и $M_2 \setminus U_2$, в котором отождествляются границы клеток U_1 и U_2. То, что получится, называется *связной суммой многообразий* M_1 *и* M_2. Заметим, что она является результатом перестройки типа 0, которая производится на обычном (несвязном!) объединении $M_1 \cup M_2$ и стягивает нульмерную сферу $P_1 \cup P_2$.

Таким образом, используя введенную терминологию, можно сказать, что пленка, реализующая последовательность k закручивающих перестроек, представляет собой связную сумму k проективных плоскостей, в которой вырезаны две дырки.

Построение связной суммы многообразия M и проективной плоскости по-другому можно описать следующим образом. Проективная плоскость получается из круга отождествлением диаметрально противоположных точек окружности. Чтобы соединить ее с M, надо и в круге, и в M вырезать по дырке. При этом круг превращается в кольцо, или, что то же самое,. в цилиндр, у которого надо отождествить диаметрально противоположные точки на одном

[1]) Они предполагаются непересекающимися; в противном случае их надо заменить диффеоморфными им непересекающимися многообразиями. — *Прим. ред.*

основании. Если совместить отождествляемые точки в трехмерном пространстве, то получится поверхность, которую называют *«перекрещенным колпаком»* (рис. 7.19). Заметим, что самопересечение получается из-за неудачной попытки построить перекрещенный колпак в трехмерном пространстве[1]. Итак, для того чтобы получить связную сумму многообразия M и проективной плоскости, мы должны отождествить край перекрещенного колпака с краем круглой дырки в M. Эта операция называется приклеиванием перекрещенного колпака к многообразию M[2]. Заметим, что можно было бы получить тот же результат, вырезав в M дырку и отождествив диаметрально противоположные точки ее края.

Оставшаяся часть исследования неориентируемых двумерных многообразий будет дана как ряд упражнений.

Упражнения. 7.4. Пусть M — связное компактное неориентируемое многообразие (без края). Так же, как в § 7.2, покажите, что на M существует функция с одним минимумом, одним максимумом и конечным числом седловых точек. Переставьте седловые точки так, чтобы соответствующие перестройки типа 0 расположились в таком порядке: сначала все разделяющие перестройки, затем — все связывающие и, наконец, закручивающие. Выведите отсюда, что многообразие M является связной суммой поверхности $M(k)$, определенной в лемме 7.2, с некоторым числом проективных плоскостей. Другими словами, M можно

---

[1]) Проективную плоскость с дыркой можно расположить в трехмерном евклидовом пространстве и без самопересечений, ибо она диффеоморфна *листу Мёбиуса* — поверхности, изображенной на рис. 17 у Милнора. Лист Мёбиуса выглядит проще, чем перекрещенный колпак, и такие его свойства, как неориентируемость или существование замкнутой кривой, разрез по которой не нарушает связности, достаточно легко усмотреть непосредственно из рисунка. Но если мы хотим, чтобы дырка была заклеена не в смысле абстрактного отождествления точек, а в буквальном смысле слова, то приходится пользоваться перекрещенным колпаком. — *Прим. ред.*

[2]) Хотя в данном случае и принято говорить о «приклеивании», это слово здесь употребляется не совсем в обычном смысле (прежде чем приклеивать, надо из M выкинуть круг!). Возможно, лучше было бы говорить о заклеивании дырки в M перекрещенным колпаком или о вклеивании в M листа Мёбиуса. — *Прим. ред.*

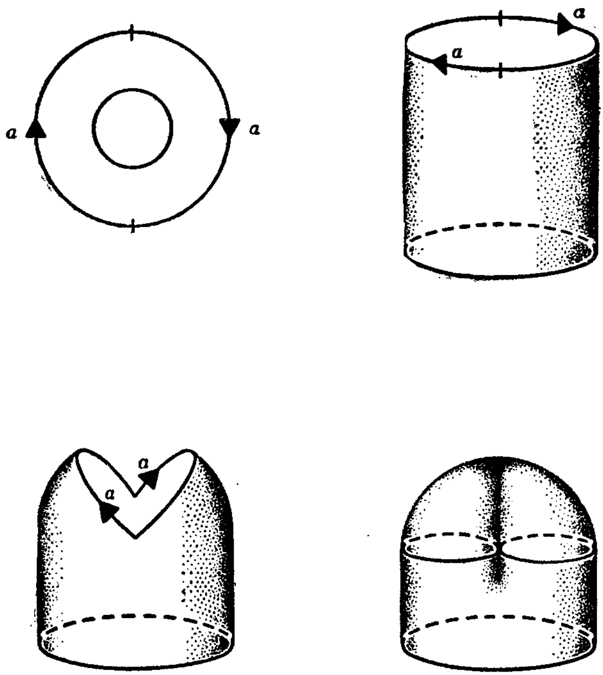


Рис. 7.19. Последовательные этапы построения перекрещенного колпака.

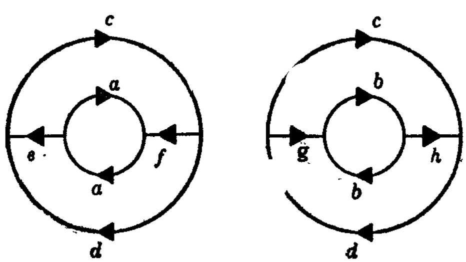


Рис. 7.20.

представить как сферу с дырками, некоторые из которых попарно соединены ручками, а остальные заклеены перекрещенными колпаками.

7.5. Буквы и стрелки на рис. 7.20 указывают способ отождествления, при котором в результате склеивания двух колец получается связная сумма двух проективных плоскостей, или, что то

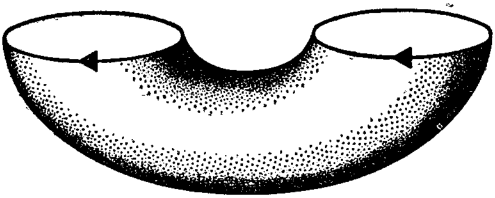


Рис. 7.21.

же самое, пара перекрещенных колпаков, приклеенных основаниями друг к другу. Разрезав по дугам e, f, g, h, указанным на рисунке, и сложив получившиеся куски по-новому, покажите, что она гомеоморфна цилиндру, концы которого отождествляются способом, указанным на рис. 7.21. (Эта поверхность является

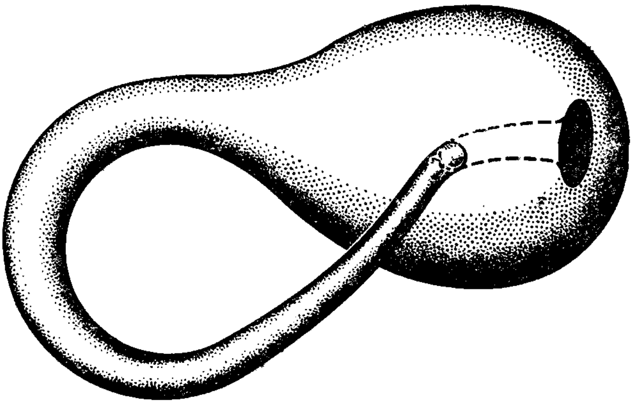


Рис. 7.22.

бутылкой Клейна.) Рис. 7.22 изображает результат отождествления. Снова заметим, что, когда мы строим поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, получается самопересечение.

7.6. Дайте другое доказательство того, что бутылка Клейна является связной суммой двух проективных плоскостей, построив на ней функцию с одним минимумом, одним м… ...мумом и двумя седловыми точками, каждая из которых соответствует закручивающей перестройке.

7.7. Заметим, что бутылка Клейна является результатом перестройки типа 0, которая проводится на сфере и не сохраняет ориентации (см. пример 6.11).

Если теперь M — проективная плоскость, на которой производится перестройка типа 0, то не имеет смысла говорить, что перестройка сохраняет ориентацию или нет. Используя это, покажите, что связная сумма бутылки Клейна и проективной плоскости гомеоморфна связной сумме тора и проективной плоскости. Выведите отсюда, что связная сумма тора и проективной плоскости гомеоморфна связной сумме трех проективных плоскостей.

7.8. Повторным применением результатов предыдущего упражнения покажите, что связная сумма поверхности Σ_p с любым числом проективных плоскостей сама будет связной суммой проективных плоскостей.

7.9. Предыдущие упражнения показывают, что связное неориентируемое компактное двумерное многообразие (без края) гомеоморфно поверхности $N(k)$, которая является связной суммой k проективных плоскостей, или, что то же самое, результатом приклеивания к сфере k перекрещенных колпаков.

7.10. Покажите теперь, что $N(h)$ не гомеоморфно $N(k)$ при $h \neq k$. Проверьте сначала, что если N' получается из N приклеиванием перекрещенного колпака, то род N' больше, чем род N. Теперь рассмотрите два сорта операций: перестройки типа 1 и удаление перекрещенных колпаков. Покажите, что после проведения конечного числа таких операций поверхность превращается в сферу, а дальнейшее применение этих операций нарушает ее связность.

Затем, используя такое же рассуждение, как в теореме 7.1 покажите, что $N(k)$ и $N(h)$ не гомеоморфны, если $k \neq h$.

7.11. Докажите, что род $N(k)$ равен k.

7.4. Теорема о трехмерных многообразиях [1])

Пусть M — трехмерное гладкое многообразие (связное и без края), которое компактно и ориентируемо. Если удалить из M две непересекающиеся клетки — обозначим их E_0 и E_2, — то получится многообразие M', край которого есть несвязное объединение двух двумерных сфер M_0 и M_2. Таким образом, M' можно считать пленкой, реализующей некоторую последовательность перестроек, превращающих

[1]) В английском оригинале этот раздел находился в § 6, но в нем фактически предполагается знакомство с некоторыми рассуждениями § 7, отчего при переводе он и был перенесен сюда. — *Прим. ред.*

M_0 в M_2. Аналогично тому, как это было сделано для поверхностей (лемма 7.1), можно обеспечить, чтобы соответствующая функция имела на M ровно один минимум, притом расположенный внутри E_0, и ровно один максимум, притом расположенный внутри E_2. Тогда все перестройки, реализуемые пленкой M', будут иметь тип 0 или 1, причем по теореме 6.5 мы можем считать, что сначала выполняются все перестройки типа 0, в результате чего получается некоторое многообразие M_1. Тогда все перестройки, происходящие на пути от M_1 до M_2, имеют тип 1, или, что то же самое, все перестройки на пути от M_2 до M_1 имеют тип 0. Напомним, что наши перегруппировки перестроек не влияют на M'. Возвращая трехмерные клетки, которые мы удалили вначале, мы видим, что M является объединением двух многообразий W_1 и W_2 с общим краем M_1. Так как все перестройки, превратившие двумерную сферу в M_1, имели тип 0 и были ориентируемы, W_1 и W_2 представляют собой шары с ручками. Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 7.2. *Трехмерное компактное ориентируемое многообразие (связное и без края) является объединением двух шаров с ручками, поверхности которых отождествлены посредством некоторого гомеоморфизма*[1].

§ 8. ПОСЛЕДУЮЩИЕ ШАГИ

Здесь мы хотим дать некоторые указания о развитии нашего предмета за пределами того круга элементарных идей и методов, которого мы до сих пор придерживались. Подробный разбор затрагиваемых вопросов потребовал бы более глубоких знаний ряда разделов алгебраической топологии, но поскольку это выходит за рамки данной книги, мы ограничимся набросками, которые должны всего лишь создать из-

[1]) Такое разбиение трехмерного многообразия на два шара с ручками называется *разбиением Хегора*. — *Прим. ред.*

-вестные интуитивные представления. Те, кто пожелает узнать об этом подробнее, найдут некоторые рекомендации для дальнейшего чтения в конце книги.

8.1. Убивание гомотопических классов

Иллюстрацией к этому разделу может служить пример 6.5; тор преобразуется в сферу перестройкой типа 1. Эта перестройка — процесс упрощения. Можно считать, что сфера проще тора в следующем смысле: любой замкнутый путь на сфере можно на этой сфере стянуть в точку, тогда как, например, окружность a на рис. 8.1 нельзя стянуть в точку на торе.

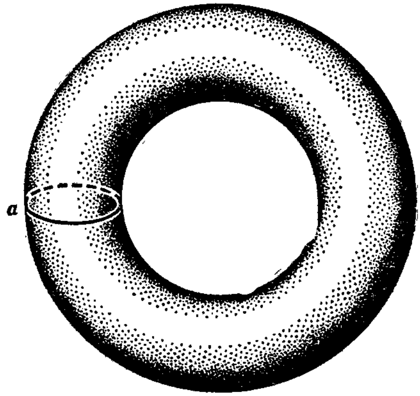


Рис. 8.1.

(Мы приводим эти утверждения как интуитивно очевидные; при строгом изложении нужны точные формулировки и доказательства.)

Посмотрим, как можно обобщить эти соображения. Первый шаг — классифицировать замкнутые кривые на многообразии M. *Замкнутый путь*, или *петля* в точке x на M, — это такое непрерывное отображение f: $I \to M$, где I — единичный интервал на оси вещественных чисел, что $f(0) = f(1) = x$. Иначе можно рассматривать f как отображение окружности в M, при котором выбранная точка на окружности переходит в точку x. Мы будем называть две таких петли f и g гомотопными и писать $f \sim g$, если существует такое непрерывное отображение $F\colon I \times I \to M$, что

$$\left.\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \\ F(s, 1) &= g(s) \end{aligned}\right\} \text{ при всех } s \in I,$$
$$F(0, t) = F(1, t) = x \text{ при всех } t \in I.$$

Геометрически это означает, что F отображает квадрат в многообразие M так, что нижняя сторона отображается при помощи f, верхняя — при помощи g, а боковые стороны переходят в точку x. Интуитивно же это означает, что если рассматривать t как время, то в течение единичного интервала времени путь f непрерывно деформируется в g. Оказывается, что отношение $\sim$ между замкнутыми путями является отношением эквивалентности, и поэтому множество петель в точке x можно разбить на классы эквивалентности. Класс, содержащий f, называется *гомотопическим классом* замкнутого пути (петли) f. Множество гомотопических классов петель в точке x на M мы будем обозначать через $\pi_1(M, x)$. В этом множестве можно ввести алгебраическую структуру следующим образом. Для двух петель f и g в точке x мы определим $fg = h$ как путь, который получится, если сначала пройти по f, а потом по g. Этот путь задается формулами

$$h(s) = f(2s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2},$$
$$h(s) = g(2s - 1), \qquad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1.$$

Тогда можно показать, что если $f \sim f'$, а $g \sim g'$, то $fg \sim f'g'$. Поэтому, обозначая гомотопический класс f через $\bar{f}$ и аналогично обозначая гомотопические классы остальных путей, мы можем определить произведение гомотопических классов, положив

$$\bar{f}\bar{g} = \overline{fg}.$$

Правая часть здесь зависит только от гомотопических классов путей $\bar{f}$ и $\bar{g}$, а не от конкретных путей f и g, которые эти классы представляют. Можно показать см. [46]), что это умножение является групповой операцией, для которой единицей будет класс постоянного пути — пути, переводящего весь отрезок I в точку x, а обратный элемент получится, если пройти путь в обратном направлении. Таким образом, $\pi_1(M, x)$ превращается в группу — это *фундаментальная группа* многообразия M[1]).

Все это можно сделать для любого топологического пространства. Однако если M — гладкое компактное многообразие, то можно показать, что группа $\pi_1(M, x)$ имеет конечное число образующих. Кроме того, если размерность многообразия M больше 2, то соображения о приведении в общее положение (§ 6.7) показывают, что в каждом гомотопическом классе всегда содержится путь f, который является гладким вложением окружности в M. Если M ориентируемо, эта окружность будет прямо вложенной (определение 6.2).

Предположим теперь, что M — ориентируемое гладкое многообразие размерности, бо́льшей 2, и пусть $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r$ — образующие группы $\pi_1(M, x)$. Как мы уже говорили, путь $\bar{\alpha}_r$ можно представить окружностью α_r, которая прямо вложена в M. Произведем перестройку типа 1, которая стягивает окружность α_r, превращая многообразие M в M'. Грубо говоря, действие этой перестройки состоит в том, что мы встраиваем в многообразие круг, краем которого является окружность α_r. Поэтому оказывается, что в M' путь α_r гомотопен постоянному. Другими словами, гомотопический класс $\bar{\alpha}_r$ становится единичным. Однако других образующих $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{r-1}$ переход от M к M', как можно показать, не затрагивает. Итак, фундаментальная группа многообразия M' получается из фундаментальной группы M при замене одной образующей $\bar{\alpha}_r$ на единицу. Обычно называют эту опера-

---

[1]) Фундаментальная группа рассматривается во многих учебниках алгебраической топологии: [36*], [49*], [г — *Прим. ред.*

цию *убиванием класса* $\tilde{\alpha}_r$. Ясно, что, проделав такую операцию с другими образующими, мы можем убить всю фундаментальную группу.

Этот результат можно сформулировать, сказав, что ориентируемое гладкое многообразие путем сферических перестроек типа 1 может быть преобразовано в многообразие с нулевой фундаментальной группой [1]). Или, используя теорему 6.3, можно сказать, что данное многообразие бордантно многообразию с нулевой фундаментальной группой. Здесь не нужно накладывать условие, что размерность больше 2; ведь мы уже знаем, что ориентируемое двумерное многообразие является сферой с ручками, а ее легко преобразовать в сферу с помощью перестроек типа 1, каждая из которых стягивает окружность, опоясывающую одну из ручек.

Изложенные идеи можно еще обобщить. Элементы из $\pi_1(M, x)$ можно считать гомотопическими классами окружностей в M. Можно определить другие группы $\pi_r(M, x)$, элементами которых являются гомотопические классы r-мерных сфер в M. Тогда классы, представленные прямо вложенными r-мерными сферами, можно убивать с помощью перестроек типа r. Операции такого рода могут привести к упрощению строения многообразия и быть полезными при решении задач о классификации.

8.2. Компенсирующие перестройки и сокращение

Мы уже видели, что если M' получается из M сферической перестройкой типа r, при которой стягивается сфера S^r и возникает сфера S^{n-r-1}, то мы можем вернуться от M' к M, делая перестройку типа $n-r-1$, при которой стягивается сфера S^{n-r-1} и возникает сфера S^r. Однако при определенных условиях существует более интересный и менее очевидный способ обратить действие перестройки. Рассмотрим сначала следующий пример.

---

[1]) Заметим, что многообразие с нулевой фундаментальной группой называется *односвязным*. — *Прим. ред.*

Пример 8.1. Начав с двумерной сферы M, преобразуем ее в тор перестройкой ϕ типа 0 (сохраняющей ориентацию), которая стягивает нульмерную сферу S^0. Этот процесс описан в примере 6.4. Пусть B — трубчатая окрестность сферы S^0 — это пара непересекающихся кругов. Край окрестности B имеет вид $S^0 \times S^1$ (пара окружностей) и для фиксированной точки p содержит множество $S^0 \times \{p\}$, которое можно считать смещенным экземпляром сферы S^0.

Но S^0 является границей одномерной клетки E^1 в M. Подберем эту клетку так, чтобы она пересекала границу окрестности B по множеству $S^0 \times \{p\}$. Тогда можно удалить из E^1 ее часть, лежащую в окрестности B, и полученная клетка E_0^1 будет иметь множество $S^0 \times \{p\}$ своей границей.

Для получения тора M' мы приклеиваем к $M \setminus B$ ручку $E^1 \times S^1$. На этой ручке имеется отрезок, концы которого соединяют концы отрезка E_0^1, при этом образуется окружность S^1 на торе. Ясно, что, сделав перестройку тора ϕ', которая имеет тип 1 и стягивает эту окружность, мы вернемся к сфере.

Исследуя этот процесс более подробно, можно извлечь дополнительную информацию. Мы уже видели, что пленка, реализующая перестройку ϕ, представляет собой сплошной тор, из внутренности которого вырезан шар, причем границей шара будет M, а внешней границей тора — M' (пример 6.7). Поверхности уровня связанной с этой перестройкой функции (см. теорему 6.1) начинаются с M и продолжают оставаться двумерными сферами до тех пор, пока мы не достигнем критического уровня. Этот уровень представляет собой тор, на котором одна окружность стянута в точку. Поверхности уровня, идущие за критическим, все являются торами. Видно, что, когда мы перебираем уровни, начиная с M, отрезок E^1 появляется на каждом из них до тех пор, пока его концы не соединятся на критическом уровне, образовав окружность S^1. Эта окружность уже сохраняется на всех последующих уровнях. Построим теперь пленку, реализующую две перестройки, из которых первой выполняется ϕ, а потом ϕ'. Для этого надо приклеить пленку, реализующую перестройку ϕ', к той пленке, реализующей ϕ, которая у нас уже имеется. На приклеиваемой пленке уровни, предшествующие критическому, можно представлять себе как расширяющееся семейство торов — все они содержат внутри себя сплошной тор, являющийся пленкой перестройки ϕ, и уровни, более близкие к критическому, заключают внутри себя уровни, более далекие от него. Окружность S^1, которую можно представлять себе расположенной на «горловине» тора, по мере приближения к критическому уровню уменьшается и, наконец, стягивается в критическую точку: мы достигли критического уровня, который выглядит как сфера с притянутыми к центру полюсами. Вне критического уровня поверхности уровня становятся сферами. Поэтому пленка, реализующая перестройки ϕ и ϕ', является шаром, внутри которого сделана шаровая полость. Здесь интересно, что эта пленка в действительности имеет вид $M \times I$. Другими словами, перестройки ϕ и ϕ' не только погашают друг друга в том смысле, что их последовательное выполнение приводит нас опять к многообразию M, но они еще и реализуются наиболее простой из всех возможных пленок — произведением $M \times I$.

Существенное обстоятельство в этом примере то, что сфера S^r, стягиваемая первой перестройкой, является границей клетки E_0^{r+1} в M, причем эта клетка в процессе перестройки замыкается, образуя прямо вложенную сферу S^{r+1} в M'. Вторая перестройка ϕ' стягивает эту сферу. Сейчас мы покажем, что всякий раз, когда выполняется это условие, последовательность перестроек ϕ, ϕ' реализуется произведением $M \times I$ [1]).

---

[1]) Короче это утверждение можно сформулировать так: *если последовательно выполняемые перестройки ϕ и ϕ' таковы, что ϕ' стягивает сферу S^{r+1}, которая ровно в одной точке пересекает сферу S^{n-r-1}, возникающую при перестройке ϕ, и при этом сферы находятся в общем положении* («трансверсальное пересечение» по терминологии Милнора, стр. 250), *то пленка, реализующая ϕ и ϕ', диффеоморфна $M \times I$.* Клетка E_0^{r+1} и обсуждение в двух следующих абзацах Уоллеса нужны для того, чтобы разобраться,

Итак, пусть S^r — прямо вложенная сфера в многообразии M, и предположим, что S^r является границей клетки E_0^{r+1}, гомеоморфно и гладко вложенной в M. Мы собираемся сделать перестройку, которая стягивает сферу S^r, удовлетворяющую этому дополнительному условию. Сфера S^r имеет в M трубчатую окрестность B со структурой произведения: B имеет вид $S^r \times E^{n-r}$, а граница B есть $S^r \times S^{n-r-1}$.

как может возникнуть такая ситуация (это нужно как для доказательства сформулированного утверждения, так и при его применении).

Строго говоря, Уоллес не доказывает сформулированного утверждения, потому что в последующих рассуждениях не уделено никакого внимания гладкости. (Кстати, «клетки» теперь, как правило, из-за «углов» на своих краях будут не диффеоморфны шару, а только гомеоморфны.) Невнимание к гладкости «мстит за себя» довольно неожиданным образом: не только не получается диффеоморфизма между пленкой и $M \times I$ (это-то понятно), но и при построении гомеоморфизма встречаются трудности (см. следующую сноску).

Тем не менее ознакомление со следующими несколькими страницами очень полезно, ибо дает ясную геометрическую картину того, как «взаимно сокращаются» перестройки ϕ и ϕ'. (Быть может, вся книга писалась ради этих именно страниц! Надо только ясно отдавать себе отчет, что здесь доказано, а о чем лишь рассказано.) Читателю, вероятно, покажется правдоподобным, что их содержание можно «подправить», позаботившись о гладкости, и получить в итоге доказательство диффеоморфности. Это действительно можно сделать, но это довольно громоздкое дело (более громоздкое, чем аналогичная корректировка § 6). Полное доказательство имеется в книжке Милнора [24*] (теорема 5.4) и занимает 15 страниц, хотя Милнор проводит рассуждения не в терминах наглядных геометрических операций (выбросим, склеим...), а на более удобном для «наведения гладкости» языке функций и векторных полей.

Я немного изменил текст этого раздела, надеясь сделать его более ясным. Основное изменение состоит в том, что я вставил три абзаца, где, если можно так выразиться, резюмируется экспозиция предстоящей драмы — еще раз упомянуто о всех тех множествах в M и M', которые будут участвовать в дальнейших построениях, и об их взаимном расположении.

Наконец, обращаю внимание, что при переходе от функции с несколькими минимумами к функции с одним минимумом (лемма 7.1) фактически происходит сокращение перестроек типа — 1 и 0. Этот пример, как и тот, с которого начинается данный раздел, полезно проанализировать в свете последующих построений. — *Прим. ред.*

Предположим, что клетку E_0^{r+1} можно подправить путем малого шевеления так, чтобы ее пересечение с границей окрестности B имело вид $S^r \times \{p\}$, где p — точка на S^{n-r-1}. Сейчас нам будет удобнее считать, что клетка E_0^{r+1} содержится в $M \setminus B$; тогда ее граница — сфера $S^r \times \{p\}$ — будет лежать на общей границе B и $M \setminus B$.

Пусть M' — результат преобразования M при помощи перестройки ϕ. Чтобы построить M', мы добавляем $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ в $M \setminus B$ и подходящим образом отождествляем граничные точки. В частности, клетки $E^{r+1} \times \{p\}$ и E_0^{r+1} склеиваются вдоль своих границ, образуя сферу S^{r+1} в M'. Предположим, что выполнено дополнительное условие: сфера S^{r+1} прямо вложена в M'. Можно показать, что это будет так, если представление окрестности B в виде прямого произведения, участвующее в построении ϕ, удовлетворяет некоторым условиям, однако здесь мы не будем этого обсуждать. Разумеется, условие «S^{r+1} прямо вложена в M'» не будет автоматически выполняться во всех возможных случаях. Оно не выполняется, например, для перестройки типа 0 на сфере, не сохраняющей ориентации.

Итак, предполагая, что сфера S^{r+1} прямо вложена в M', рассмотрим ее трубчатую окрестность B', представленную в виде произведения, и пусть ϕ' — соответствующая перестройка типа $r+1$, стягивающая сферу S^{r+1}. Заметим, что если разложить S^{n-r-1} в объединение двух клеток E_1^{n-r-1} и E_2^{n-r-1}, первая из которых содержит точку p, то B' можно представить как объединение окрестности $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$ клетки $E^{r+1} \times \{p\}$ в $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ и окрестности клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$. Последняя окрестность сама является n-мерной клеткой E_0^n.

До сих пор мы не рассматривали S^{n-r-1} как какую-то определенную сферу в M', однако позднее будет удобно, зафиксировав какую-нибудь точку q внутри клетки E^{r+1}, говорить о сфере $\{q\} \times S^{n-r-1} \subset M'$ как о сфере S^{n-r-1}. (Это обычный прием, когда сомножитель считается вложенным в прямое произведение, например ось x — в плоскость (x, y). Конкретный выбор q в данном случае безразличен.) Тогда можно будет сказать, что перестройка, обратная к ϕ, стягивает сферу S^{n-r-1} (подробнее: она изымает из M' окрестность $E^{r+1}\times S^{n-r-1}$ этой сферы и вместо нее «вклеивает» $B = S^r \times E^{n-r}$).

Отметим своего рода симметрию между перестройкой ϕ' и перестройкой, обратной к ϕ: стягиваемые ими сферы S^{r+1} и S^{n-r-1} многообразия M' имеют ровно одну общую точку (q, p) и эта точка имеет в M' окрестность $E^{r+1}\times E_1^{n-r-1}$; сфера S^{r+1} пересекает эту окрестность по клетке $E^{r+1}\times\{p\}$, а S^{n-r-1} — по клетке E_1^{n-r-1} (бывшая $\{q\}\times E_1^{n-r-1}$); сфера S^{r+1} является объединением первой клетки (лежащей в этой окрестности) и клетки E_0^{r+1} (лежащей вне этой окрестности), а сфера S^{n-r-1} — объединением клетки E_1^{n-r-1} (лежащей в названной окрестности) и клетки E_2^{n-r-1} (лежащей вне ее). После того как мы обозначили окрестность клетки E_0^{r+1} в $M\setminus B$ (т. е. фактически, в $M'\setminus(E^{r+1}\times S^{n-r-1})$) через E_0^n, естественно обозначить окрестность клетки E_2^{n-r-1} в $M'\setminus B'$ через E_1^n.

Проследим теперь за построением пленки, реализующей последовательность перестроек: ϕ, затем ϕ'. Напомним, что пленка, реализующая перестройку, получается так: к произведению

$$(*)\quad (\text{многообразие}\setminus\text{окрестность стягиваемой сферы})\times \times\ \text{интервал}$$

надо добавить $(n+1)$-мерную клетку и произвести определенные отождествления граничных точек; кроме того, исходное многообразие интерпретируется как одна часть края пленки, а перестроенное — как другая часть (не пересекающаяся с первой). Так как у нас будут две пленки, реализующие ϕ и ϕ', то удобно будет чуть-чуть изменить обозначения: при построении первой пленки мы будем обозначать интервал в $(*)$ через I и считать, что $I=[0, 1]$, а при построении второй пленки мы будем обозначать интервал через I' и считать, что $I' = [1, 2]$. (Это соответствует тому, что если M лежит в евклидовом пространстве $\mathscr{E}$, первая пленка расположена в $\mathscr{E} \times I$ (причем $\mathscr{E}$ мы естественным образом отождествляем с $\mathscr{E} \times \{0\}$) и M' получается в пересечении этой пленки с $\mathscr{E} \times \{1\}$, то вторую пленку естественно расположить в $\mathscr{E} \times I'$; тогда пленка, реализующая последовательность перестроек ϕ и ϕ', будет просто объединением этих двух пленок, как это обсуждалось в § 6. Она будет расположена в $\mathscr{E} \times I''$, где $I'' = I \cup I' = [0, 2]$, и конечным результатом перестроек ϕ, ϕ' будет ее пересечение с $\mathscr{E} \times \{2\}$. Мы будем доказывать, что она гомеоморфна $M \times I''$.)

Далее, пленка, реализующая перестройку ϕ, получается добавлением к $(M \setminus B) \times I$ $(n+1)$-мерной клетки E с надлежащим отождествлением граничных точек. Пересечение клетки E с M равно B, тогда как ее пересечение с M' есть множество $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, добавляемое к $M \setminus B$ при построении ϕ. С другой стороны, пленка, реализующая ϕ', получается добавлением к $(M' \setminus B') \times I'$ $(n+1)$-мерной клетки E', пересечение которой с M' равно B'. Поэтому пересечение клеток E и E' совпадает с пересечением множеств B' и $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Это пересечение можно записать как $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$ (см. замечание, сделанное выше о строении окрестности B'). Существенно то, что это n-мерная клетка. Таким образом, $(n+1)$-мерные клетки E и E' пересекаются по n-мерной клетке, лежащей на границе каждой из них. Отсюда следует, что $E \cup E'$ есть $(n+1)$-мерная клетка.

Замечание[1]). Читателю рекомендуется, прежде всего, изобразить на рисунке склеивание двух двумерных или трехмерных клеток E, E' по одномерной, соответственно двумерной, клетке $K = \Sigma \cap \Sigma'$, где Σ и Σ' — границы E и E', и убедиться, что получается снова клетка. Нетрудно сообразить, что этот факт тесно связан с таким: в данном случае $\Sigma \setminus K$ и $\Sigma' \setminus K$ — тоже клетки.

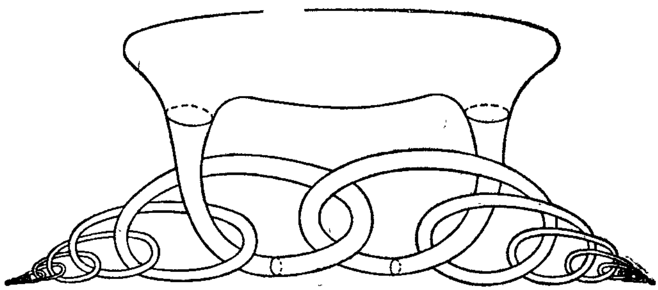
---

[1]) Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*

Вероятно, довольно неожиданным покажется следующее предостережение: при $n \geqslant 3$ на n-мерной сфере S^n существует такое множество K, гомеоморфное шару

$$D^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum x_i^2 \leqslant 1\right\},$$

что $S^n \setminus K$ не гомеоморфно $\operatorname{Int} D^n$. Перефразировка: при $n \geqslant 3$ в евклидовом n-мерном пространстве R^n существует гомеоморфное сфере S^{n-1} множество, делящее R^n на такие две области, что замыкание внутренней области гомеоморфно D^n, но внешняя не гомеоморфна $R^n \setminus D^n$. Этот монстр заслуживает того, чтобы на него посмотреть:



(Каждое щупальце образует бесконечное число петель, стягивающихся к одной точке.) Заметим, что нарушение гладкости в «концах щупалец» является, в некотором смысле, более сильным, чем то, которое бывает связано с наличием «углов».

С другой стороны, сравнительно легко доказать, что $E \cup E'$ будет клеткой при гладких E, E', K. Впрочем, та негладкость, которая возникает при построениях этого раздела, как и в § 6, связана только с появлением «углов»; *такая* негладкость еще не мешает, но в общем случае это доказывается сложнее.

Далее будут еще два места, где можно сделать аналогичное замечание: во-первых, построение клетки E''; во-вторых, когда определенная часть границы E'' представится в виде $S^{n-1} \times I''$ и мы захотим продолжить это представление до представления $E'' = D^n \times I''$. Когда имеется всего два-три излома во вполне определенных местах, то можно рассчитывать, что удастся придумать короткое рассуждение, учитывающее специфику именно данных изломов; однако если в довольно длинном построении углы возникают на каждом шагу, то к концу их накопится довольно много и они будут расположены в самых разных частях фигуры. Тогда ничего иного не остается делать, кроме как считать, что мы рассматриваем «общий» случай «фигур с углами», а это значит развить целую теорию с точными определениями, леммами и тому подобным. Проще все время «сглаживать» углы.

Теперь мы добавим к $E \cup E'$ еще несколько кусков так, что в результате по-прежнему получится $(n+1)$-мерная клетка. Сначала добавим множество $E_0^n \times I$, лежащее в $(M \setminus B) \times I$; здесь E_0^n — как и раньше, окрестность клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$. Множество $E_0^n \times I$ пересекает $E \cup E'$ по двум множествам: первое — $E_0^n \times \{1\}$ (это пересечение с E'), а второе имеет вид $S^r \times E_1^{n-r-1} \times I$ (это пересечение с E; оно возникает из-за того, что пересечение E_0^n с B имеет вид $S^r \times E_1^{n-r-1}$). Теперь легко видеть, что объединение $E_0^n \times I$ с $E \cup E'$ по-прежнему является $(n+1)$-мерной клеткой.

Относительно доказательства последнего утверждения укажем следующее. Пусть E^{n+1} есть $(n+1)$-мерная клетка, ограниченная сферой S^n, а K — любое n-мерное многообразие с краем, лежащее в S^n. Тогда объединение E^{n+1} и $K \times I$, в котором точки K в E^{n+1} отождествляются с точками множества $K \times \{0\}$ в $K \times I$, является $(n+1)$-мерной клеткой. Это почти тривиально. Наша ситуация немножко сложнее: в крае многообразия K имеется такое $(n-1)$-мерное подмногообразие L, что S^n содержит множество $L \times I$, часть $L \times \{0\}$ которого отождествляется с L, а остальная часть с K не пересекается; это множество $L \times I$ в S^n отождествляется с множеством $L \times I$ в $K \times I$. Надо показать, что в результате по-прежнему получается $(n+1)$-мерная клетка.

Теперь заметим, что точки, только что добавленные к $E \cup E'$, все содержатся в пленке, реализующей перестройку ϕ. Напомним также, что существует некая симметрия между перестройкой ϕ' и перестройкой, обратной к ϕ; об этом уже говорилось. Еще одно множество точек, которое мы сейчас добавим к $E \cup E'$, лежит в пленке, реализующей ϕ', и выступает по отношению к перестройке, обратной к ϕ', в той же роли, в какой выступает уже добавленное нами множество $E_0^n \times I$ по отношению к перестройке ϕ. А именно, мы добавим множество вида $E_1^n \times I'$, где

E_1^n — уже упоминавшаяся окрестность клетки E_2^{n-r-1} (второй половины сферы S^{n-r-1}) в $M' \setminus B'$. При этом граничные точки снова отождествятся так, что в результате получится $(n+1)$-мерная клетка.

Обозначим через E'' $(n+1)$-мерную клетку, полученную добавлением к $E \cup E'$ двух только что описанных множеств, и посмотрим, что останется от пленки, реализующей перестройки ϕ и ϕ', после удаления E''. То, что останется от пленки, реализующей ϕ, представляет собой произведение $(M \setminus B) \times I$, из которого выброшено множество $E_0^n \times I$. Результат имеет вид $N \times I$, где $N = M \setminus B \setminus E_0^n$. Заметим, что $N \times \{1\}$ есть дополнение в M' к окрестностям сфер S^{n-r-1} и S^{r+1}. Аналогично, дополнение к E'' в пленке, реализующей ϕ', имеет вид $N' \times I'$. Но так как оно пересекается с M' по тому же множеству, что и $N \times I$, N' будет равно $N \times \{1\}$. Таким образом, дополнение к E'' в общей пленке перестроек ϕ, ϕ' имеет вид $N \times I''$. Кроме того, структура произведения на $N \times I''$ индуцирует структуру произведения на части границы E'', остальная же часть состоит из двух n-мерных клеток, а именно клетки $B \cup E_0^n$ в исходном многообразии M и аналогичного множества на многообразии, полученном в результате последовательного проведения перестроек ϕ и ϕ'. Эту структуру произведения можно продолжить до структуры на всей клетке E'', которая тогда представится в виде произведения отрезка I'' на n-мерную клетку, и если теперь мы соединим это E'', представленное как произведение, с произведением $N \times I''$, то окажется, что пленка, реализующая последовательность перестроек ϕ, ϕ', представляется в виде произведения $M \times I''$. В частности, это означает, что последовательное выполнение перестроек ϕ и ϕ' дает тождественное преобразование многообразия M.

Если перестройки ϕ и ϕ' связаны так, как описано выше, то мы будем говорить, что перестройка ϕ' *компенсирует* перестройку ϕ. Суммируя наши результаты, можно сказать, что при последовательном выполнении перестройки и компенсирующей ее перестройки многообразие M не меняется, а пленка, реализующая эти две перестройки, имеет вид $M \times I$.

Приложение к трехмерным многообразиям

Из результата предыдущего раздела вытекает интересное следствие, относящееся к строению ориентируемого трехмерного многообразия.

Сначала заметим, что, вообще, если ϕ — сферическая перестройка типа r на M, удовлетворяющая условию предыдущего раздела, то ϕ преобразует M в M', а компенсирующая перестройка ϕ' преобразует M' обратно в M. Но это означает, что перестройка, обратная к ϕ', преобразует M в M', причем тип этой перестройки равен $n-r-2$. Другими словами, если многообразие M превратилось в M' в результате перестройки типа r, удовлетворяющей условию предыдущего раздела, то M можно также превратить в M' некоторой перестройкой типа $n-r-2$.

Пусть теперь M — компактное ориентируемое трехмерное многообразие (связное и без края). Существует теорема[1]), утверждающая, что каждое такое многообразие является краем некоторого ориентируемого четырехмерного многообразия (см. [51]). Мы можем удалить из этого четырехмерного многообразия четырехмерную клетку; получится многообразие, край которого является несвязным объединением многообразия M и трехмерной сферы. Следовательно (теорема 6.3), можно получить M из сферы при помощи конечного числа сферических перестроек, причем все перестройки типов 0 и 2 будут сохранять ориентацию[2]). Каждая ориентируемая перестройка

[1]) Впервые доказанная В. А. Рохлиным. — *Прим. ред.*

[2]) В данном случае перестройка ϕ', обратная к перестройке ϕ типа 2, является перестройкой типа 0, и мы говорим, что ϕ сохраняет ориентацию, если ϕ' сохраняет ориентацию. Сохранение ориентации при всех перестройках следует из того, что в данном случае можно «согласованно» ориентировать все многообразия уровня функции, соответствующей перестройке. Для этого надо воспользоваться ориентацией пленки и тем, что для любой ее некритической точки в касательном пространстве к пленке имеется однозначно выделенный луч, перпендикулярный к многообразию уровня и направленный в сторону возрастания функции. — *Прим. ред.*

типа 0 заведомо удовлетворяет условию предыдущего раздела, так как сфера S^0, стягиваемая такой перестройкой, является границей клетки E', а концы этой клетки в процессе перестройки соединяются, образуя прямо вложенную окружность. Поэтому, следуя сделанному выше замечанию, мы можем заменить каждую перестройку типа 0 на пути от S^3 до M перестройкой типа 1. Перестройки типа 2 обратны к перестройкам типа 0, так что их тоже можно заменить перестройками типа 1 (в данном случае перестройка, обратная к перестройке типа 1, также имеет тип 1). Следовательно, данное многообразие M получается из трехмерной сферы конечным числом перестроек типа 1.

Описывая явно действие перестройки типа 1, мы приходим к следующей теореме[1]:

Теорема 8.1. *Ориентируемое компактное трехмерное многообразие (связное и без края) можно получить из трехмерной сферы, если вырезать из нее конечное число непересекающихся сплошных торов (множеств вида $S^1 \times E$) и заполнить получившиеся полости новыми сплошными торами, подходящим способом отождествляя границы.*

Отметим, что граница каждой полости имеет вид $S^1 \times S^1$, и существует на самом деле бесконечное число способов отождествить ее с границей сплошного тора; поэтому существует бесконечное число различных построений такого сорта. Однако нелегко решить вопрос о том, когда два таких различных построения приведут к одинаковому результату. Для этого в первую очередь понадобилось бы решение проблемы Пуанкаре. Гипотеза Пуанкаре заключается в том, что всякое ориентируемое трехмерное многообразие, на котором любую окружность можно стянуть в точку, является на самом деле трехмерной сферой. Она не доказана и не опровергнута.

---

[1]) Принадлежащей Дену, который доказывал ее иначе (это было задолго до появления теоремы Рохлина). — *Прим. ред.*

Посвящается

Хайнцу Хопфу

Дж. МИЛНОР

Топология с дифференциальной точки зрения

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эти лекции были прочитаны в декабре 1963 г. в университете штата Вирджинии при поддержке Пейдж-Барбуровского лекционного фонда[1]). В них представлены некоторые темы из начальных разделов топологии, сконцентрированные вокруг введенного в 1912 г. Брауэром определения степени отображения. Используемые методы, однако, — это методы дифференциальной топологии, а не комбинаторные методы Брауэра.

Центральную роль играют понятие регулярного значения и теорема Сарда и Брауна, утверждающая, что каждое гладкое отображение имеет регулярные значения.

Для упрощения изложения все многообразия считаются бесконечно дифференцируемыми и явно вложенными в евклидово пространство. Начальные сведения из теоретико-множественной топологии и теории функций действительного переменного предполагаются известными и используются без доказательств.

Я хотел бы выразить благодарность Дэвиду Уиверу, чья преждевременная смерть опечалила всех нас. Его превосходные записи сделали возможным появление этой книги.

Дж. Милнор

Принстон, Нью-Джерси

---

[1]) В американском издании сообщаются некоторые сведения об этом фонде: он называется по имени своих основателей и предназначен для чтения в университете Вирджинии циклов лекций выдающимися деятелями в какой-либо отрасли науки. — *Прим. ред.*

§ 1. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сначала объясним некоторые обозначения и термины: R^k обозначает k-мерное евклидово пространство; таким образом, точка $x \in R^k$ — это набор k действительных чисел

$$x = (x_1, \ldots, x_k).$$

Пусть $U \subset R^k$ и $Y \subset R^l$ — открытые множества. Отображение f множества U в V (будем писать $f\colon U \to V$) называется *гладким*, если все частные производные $\partial^n f/\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}$ существуют и непрерывны.

Более общо, пусть $X \subset R^k$ и $Y \subset R^l$ — произвольные подмножества евклидовых пространств. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гладким*, если для любой точки $x \in X$ существуют открытое множество $U \subset R^k$, содержащее x, и гладкое отображение $F\colon U \to R^l$, совпадающее с f на $U \cap X$ [1]).

Заметим, что если отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ гладкие, то композиция $g \circ f\colon X \to Z$ тоже будет гладким отображением. Тождественное отображение произвольного множества X автоматически является гладким.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *диффеоморфизмом*, если f гомеоморфно [2])

---

[1]) Определение понятия «функция, гладкая на подмножестве евклидова пространства» у Милнора на первый взгляд кажется более широким, чем у Уоллеса (определения 2.2, 2.3), но с помощью подходящего разбиения единицы ([30], стр. 22, теорема 1) можно доказать их эквивалентность. Впрочем, для дальнейшего это не важно. — *Прим. ред.*

[2]) Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом* множеств X и Y, если $f(X) = Y$, отображение f взаимно однозначно и как f, так и обратное к нему отображение f^{-1} непрерывны. — *Прим. ред.*

отображает X на Y, и оба отображения f и f^{-1} гладкие[1]).

Мы можем приблизительно охарактеризовать предмет дифференциальной топологии, сказав, что она изучает те свойства множества $X \subset R^k$, которые инвариантны относительно диффеоморфизмов.

Однако мы не хотим рассматривать совершенно произвольные множества X. Следующее определение выделяет особенно интересный и полезный класс.

Определение[2]). Подмножество $M \subset R^k$ называется *гладким многообразием размерности m* (или *гладким m-мерным многообразием*), если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность $W \cap M$, которая диффеоморфна открытому подмножеству U евклидова пространства R^m.

Любой данный диффеоморфизм g: $U \to W \cap M$ называется *параметризацией* области $W \cap M$. (Обратный диффеоморфизм $W \cap M \to U$ называется *системой координат на* $W \cap M$.)

Иногда нам понадобится рассматривать многообразия размерности нуль. По определению M — *нульмерное* многообразие, если каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $W \cap M$, состоящую только из нее самой.

Примеры. Единичная сфера S^2, состоящая из всех точек $(x, y, z) \in R^3$, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, является гладким многообразием размерности 2. Действительно, диффеоморфизм

$$(x, y) \to \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 < 1$$

[1]) Согласно определению гладкости, если $x \in X \subset R^k$ и $y \in Y \subset R^l$, то существуют такие гладкие отображения g: $U \to R^l$ и h: $V \to R^k$, где U и V — некоторые окрестности точек x и y в R^k и R^l, что совпадают ограничения

$$g \mid U \cap X = f \mid U \cap X, \quad h \mid V \cap Y = f^{-1} \mid V \cap Y.$$

Обратите внимание, что g и h уже не обязаны быть обратными по отношению друг к другу. — *Прим. ред.*

[2]) С более общей точки зрения (см. Уоллеса), здесь определяются гладкие подмногообразия евклидова пространства. — *Прим. ред.*

параметризует область $z > 0$ на S^2. Поменяв ролями x, y, z и изменив знаки у переменных, мы получим подобные же параметризации областей $x > 0$, $y > 0$, $x < 0$, $y < 0$ и $z < 0$, которые покрывают сферу. Следовательно, S^2 — гладкое многообразие.

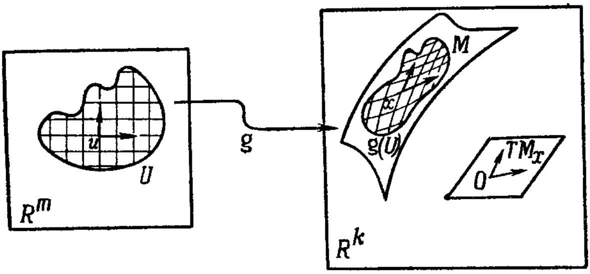


Рис. 1. Параметризация области на M.

Вообще сфера $S^{n-1} \subset R^n$, состоящая из всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию $\sum x_i^2 = 1$, является гладким многообразием размерности $n-1$. Например, $S^0 \subset R^1$ — многообразие, состоящее ровно из двух точек.

Множество всех точек $(x, y) \in R^2$, для которых $x \neq 0$ и $y = \sin(1/x)$, дает несколько более «дикий» пример гладкого многообразия.

Касательные пространства и производные

Для того чтобы определить понятие *производной*[1]) гладкого отображения f: $M \to N$, где M и N — гладкие многообразия, мы сначала свяжем с каждой точкой $x \in M \subset R^k$ линейное подпространство $TM_x \subset R^k$ размерности $m = \dim M$, называемое *касательным пространством* многообразия M в точке x. Тогда df_x будет некоторым линейным отображением TM_x в TN_y, где $y = f(x)$. Элементы векторного пространства TM_x называются *касательными векторами* к M в точке x.

---

[1]) Вместо производной столь же часто говорят о *дифференциале*. — *Прим. ред.*

Интуитивно можно представлять себе m-мерную плоскость в R^k, которая наилучшим образом аппроксимирует M вблизи x. Тогда TM_x — параллельная ей плоскость, проходящая через начало координат. (Ср. рис. 1 и 2.) Аналогично можно представлять себе неоднородное линейное отображение касательной плоскости в точке x в касательную плоскость в точке y,

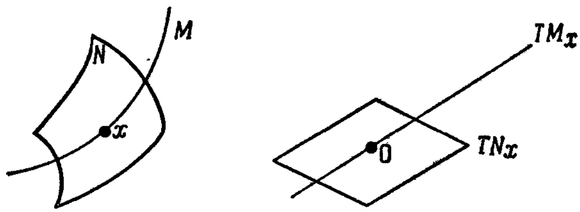


Рис. 2. Касательные пространства подмногообразия евклидова пространства.

которое лучше всего аппроксимирует f. После параллельного переноса обеих плоскостей в начало координат мы получаем df_x.

Прежде чем дать настоящее определение, мы должны изучить специальный класс отображений одного открытого множества в другое. Для любого открытого множества $U \subset R^k$ *касательное пространство* TU_x определяется как все векторное пространство R^k. Для произвольного гладкого отображения f: $U \to V$ *производная*

$$df_x\colon R^k \to R^l$$

определяется формулой

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

где $x \in U$, $h \in R^k$. Ясно, что $df_x(h)$ — линейная функция от h. (В действительности df_x — это такое линейное отображение, которое соответствует матрице $(\partial f_i/\partial x_j)_x$ порядка $l \times k$, составленной из первых частных производных, вычисленных в точке x.)

Отметим два основных свойства операции дифференцирования:

1 (производная сложной функции, или цепное правило). *Если $f\colon U \to V$ и $g\colon V \to W$ — гладкие отображения и $f(x) = y$, то*

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

Другими словами, каждому коммутативному треугольнику[1]) гладких отображений

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & W \end{tikzcd}$$

где U, V и W — открытые подмножества векторных пространств R^k, R^l и R^m, соответствует коммутативный треугольник линейных отображений

$$\begin{tikzcd} & R^l \arrow[dr, "dg_y"] & \\ R^k \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g \circ f)_x"'] & & R^m \end{tikzcd}$$

---

[1]) Пусть имеется диаграмма, состоящая из вершин и соединяющих их стрелок, причем каждой вершине сопоставлено определенное множество, а каждой стрелке, соединяющей две вершины, сопоставлено отображение соответствующих множеств. Например,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "i"] & \\ & & E \\ A \arrow[uu, "f"] \arrow[r, "k"] & D \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Диаграмма называется *коммутативной*, если всякий раз, когда от одной ее вершины к другой можно перейти по двум разным путям, двигаясь все время по стрелкам, совпадают композиции соответствующих отображений в соответствующем порядке (первым действует отображение, соответствующее первой стрелке пути, и т. д.). Например, коммутативность изображенной выше диаграммы означает, что

$$h \circ g \circ f = k, \qquad i = j \circ h$$

(откуда уже следует $j \circ k = i \circ g \circ f = j \circ h \circ g \circ f$). — *Прим. ред.*

2. *Если I — тождественное отображение множества U, то dI_x — тождественное отображение пространства R^k. Более общо, если $U \subset U'$ — открытые множества и*

$$i\colon U \to U'$$

— отображение вложения[1]), *то di_x также является тождественным отображением пространства R^k.*

Заметим также следующее:

3. *Если $L\colon R^k \to R^l$ — линейное отображение, то*

$$dL_x = L.$$

В качестве простого следствия этих двух свойств мы имеем такое утверждение.

Утверждение. *Если f — диффеоморфизм открытого множества $U \subset R^k$ на открытое множество $V \subset R^l$, то k должно равняться l и линейное отображение*

$$df_x\colon R^k \to R^l$$

должно быть невырожденным.

Доказательство. Композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением множества U. Следовательно, $d(f^{-1})_y \circ df_x$ — тождественное отображение пространства R^k. Аналогично, $df_x \circ d(f^{-1})_y$ — тождественное отображение пространства R^l. Таким образом, линейное отображение df_x имеет двустороннее обратное, откуда немедленно следует, что $k = l$.

Верно и частичное обращение этого утверждения. Пусть $f\colon U \to R^k$ — гладкое отображение, причем U открыто в R^k.

Теорема об обратной функции. *Если производная $df_x\colon R^k \to R^l$ невырожденна, то f диффеоморфно отображает любое достаточно малое открытое множество U', содержащее x, на открытое множество $f(U')$.*

---

[1]) То есть отображение, сопоставляющее точке $x \in U$ ту же самую точку, рассматриваемую как элемент множества U'. — *Прим. ред.*

(Смотри Апостол [4, стр. 144] или Дьедонне [13, стр. 311].)

Заметим, что f в целом может и не быть взаимно однозначным, даже если при всех x производная df_x невырожденна. (Поучительный пример дается отображением $z \to \exp z$ комплексной плоскости в себя.)

Теперь мы определим *касательное пространство* TM_x для произвольного гладкого многообразия $M \subset R^k$. Выберем параметризацию

$$g\colon U \to M \subset R^k$$

окрестности $g(U)$ точки x на M, $g(u) = x$. Здесь U — открытое подмножество из R^m. Если рассматривать g как отображение множества U в R^k, то будет определена производная

$$dg_u\colon R^m \to R^k.$$

Положим TM_x *равным образу* $dg_u(R^m)$ (см. рис. 1).

Мы должны доказать, что это построение не зависит от выбора параметризации g. Пусть $h\colon V \to M \subset R^k$ — другая параметризация окрестности $h(V)$ точки x на M, и пусть $v = h^{-1}(x)$. Тогда $h^{-1} \circ g$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность U_1 точки u на окрестность V_1 точки v. Коммутативная диаграмма гладких отображений открытых множеств

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

влечет за собой коммутативную диаграмму линейных отображений

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\cong", "d(h^{-1}\circ g)_u"'] & & R^m \arrow[ul, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

откуда немедленно следует, что

$$\operatorname{Im}(dg_u) = \operatorname{Im}(dh_v).$$

Таким образом, TM_x корректно определено.

Теперь мы докажем, что TM_x является *m-мерным векторным пространством.* Ввиду гладкости отображения

$$g^{-1}\colon\ g(U) \to U$$

можно выбрать открытое множество W, содержащее x, и гладкое отображение $F\colon\ W \to R^m$, совпадающее с g^{-1} на $W \cap g(U)$. Полагая $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\text{вложение}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

и связанную с ней коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & R^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\text{тождественное}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

Из последней диаграммы, очевидно, следует, что ранг отображения dg_u равен m. Следовательно, размерность его образа TM_x равна m.

Пусть $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ — два гладких многообразия, а

$$f\colon\ M \to N$$

— гладкое отображение и $f(x) = y$. Мы сейчас следующим образом определим *производную*

$$df_x\colon\ TM_x \to TN_y.$$

Так как f — гладкое отображение, то существуют содержащее точку x открытое множество W и гладкое отображение $F\colon W \to R^l$, совпадающее с f на $W \cap M$. *Определим* $df_x(v) = dF_x(v)$ *для всех* $v \in TM_x$.

Для обоснования корректности этого определения необходимо доказать, что $dF_x(v)$ принадлежит пространству TN_y и не зависит от конкретного выбора отображения F.

Сначала выберем параметризации

$$g\colon U \to M \subset R^k \quad \text{и} \quad h\colon V \to N \subset R^l$$

окрестностей $g(U)$ и $h(V)$ точек x и y соответственно. Уменьшив U, если потребуется, мы можем считать, что $g(U) \subset W$ и что f отображает $g(U)$ в $h(V)$. Таким образом, корректно определено гладкое отображение

$$h^{-1} \circ f \circ g\colon U \to V.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму гладких отображений открытых множеств

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & R^l \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h} \\ U & \xrightarrow{h^{-1}\circ f\circ g} & V \end{array}$$

Переходя к производным, мы получим коммутативную диаграмму линейных отображений

$$\begin{array}{ccc} R^k & \xrightarrow{dF_x} & R^l \\ {\scriptstyle dg_u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle dh_v} \\ R^m & \xrightarrow{d(h^{-1}\circ f\circ g)_u} & R^m, \end{array}$$

где $u = g^{-1}(x)$, $v = h^{-1}(y)$.

Из этой диаграммы немедленно следует, что dF_x переводит $TM_x = \operatorname{Im}(dg_u)$ в $TN_y = \operatorname{Im}(dh_v)$. Кроме того, отображение df_x не зависит от конкретного выбора отображения F, так как мы можем получить то же самое линейное отображение, обходя основание этой диаграммы, а именно:

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}.$$

Тем самым доказана корректность определения производной.

Как и выше, операция дифференцирования обладает двумя основными свойствами:

1 (цепное правило). *Если* f: $M \to N$ *и* g: $N \to P$ — *гладкие отображения и* $f(x) = y$, *то*

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

2. *Если* I — *тождественное отображение многообразия* M, *то* dI_x — *тождественное отображение касательного пространства* TM_x. *Более общо, если* $M \underset{\to}{\subset} N$ *при помощи отображения вложения* i, *то* $TM_x \underset{\to}{\subset} TN_y$ *при помощи отображения вложения* di_x (см. рис. 2).

Доказательства этих свойств очевидны.

Как и раньше, эти два свойства дают следующее

Утверждение. *Если* f: $M \to N$ — *диффеоморфизм, то* df_x: $TM_x \to TN_y$ — *изоморфизм векторных пространств. В частности, размерность многообразия* M *должна быть равна размерности многообразия* N [1]).

---

[1]) Полезно иметь в виду, что отображение $f\colon M \to N$ гладких многообразий $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ будет гладким тогда и только тогда, когда будут гладкими его представления в локальных координатах; последнее означает, что если g: $U \to M$ и h: $V \to N$ — две параметризации, причем $f \circ g(U) \subset h(V)$, то отображение $h^{-1} \circ f \circ g$: $U \to V$ — гладкое. Действительно, доказывая корректность определения производной, Милнор попутно отмечает гладкость отображения $h^{-1} \circ f \circ g$ для гладких f. Обратно, пусть известно, что представления отображения $f\colon M \to N$ в локальных координатах гладкие. Для $x \in M$ мы должны указать такую окрестность W в R^k и гладкое отображение ψ: $W \to R^l$, что $\psi | W \cap M = f | W \cap M$. По определению параметризации существуют такие окрестность $W \ni x$ и гладкое отображение φ: $W \to R^m$, что $\varphi | W \cap M = g^{-1} | W \cap M$. Можно считать, что $\varphi(W) \subset U$. Рассматривая отображения

$$\begin{array}{ccccccccc} W & \xrightarrow{\varphi} & U & \xrightarrow{g} & g(U) & \xrightarrow{f} & h(V) & \xrightarrow{h^{-1}} & V \xrightarrow{h} R^l \\ & & & & \cap & & \cap & & \\ & & & & M & \xrightarrow{f} & N & & \end{array}$$

легко понять, что за ψ можно взять композицию $h \circ (h^{-1} \circ f \circ g) \circ \varphi$; ее гладкость следует из гладкости отображений φ, $h^{-1} \circ f \circ g$ и h.

Обычно гладкость отображения одного гладкого многообразия в другое определяется именно как гладкость представления данного отображения в локальных координатах. Милнор далее фактически тоже пользуется этим определением. — *Прим. ред.*

Регулярные значения

Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий одинаковой размерности[1]. Назовем точку $x \in M$ *регулярной*, если дифференциал df_x невырожден. Из теоремы об обратной функции следует, что в этом случае f диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $x \in M$ на открытое множество многообразия N. Точка $y \in N$ называется *регулярным значением*, если $f^{-1}(y)$ состоит только из регулярных точек (в частности, если $f^{-1}(y)$ пусто).

Если дифференциал df_x вырожден, то x называется *критической точкой* отображения f, а ее образ $f(x)$ — *критическим значением*. Таким образом, любая точка $y \in N$ является либо регулярным, либо критическим значением в зависимости от того, содержит или не содержит $f^{-1}(y)$ критическую точку.

Отметим, что *если M компактно, а $y \in N$ — регулярное значение, то $f^{-1}(y)$ — конечное (возможно, пустое) множество точек.*

Множество $f^{-1}(y)$, будучи замкнутым подмножеством компакта M, само является компактом; кроме того, $f^{-1}(y)$ дискретно[2], поскольку f взаимно однозначно в окрестности любой точки $x \in f^{-1}(y)$.

Для гладкого отображения $f\colon M \to N$, где M — компакт, и регулярного значения $y \in N$ *обозначим через $\# f^{-1}(y)$ число точек в $f^{-1}(y)$*. Следует отметить, что $\# f^{-1}(y)$ локально постоянна как функция y (здесь y пробегает только регулярные значения!), т. е. *у точки y существует такая окрестность $V \subset N$, что $\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(y')$ для всех $y' \in V$.* [Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — все точки из $f^{-1}(y)$; выберем попарно непересекающиеся окрестности $U_1, \ldots, U_k$ этих точек, которые диффеоморфно отображаются на окрестности $V_1, \ldots, V_k$ в многообразии N. Мы тогда можем положить

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k \setminus f(M \setminus \bigcup U_i).]$$

---

[1] Это ограничение будет снято в § 2.

[2] То есть все его точки — изолированные. — *Прим. ред.*

Основная теорема алгебры

В качестве приложения этих понятий мы докажем основную теорему алгебры: *каждый комплексный многочлен $P(z)$, отличный от константы, должен где-то обращаться в нуль.*

Для доказательства надо прежде всего перейти от плоскости комплексных чисел к компактному многообразию. Рассмотрим единичную сферу $S^2 \subset R^3$ и стереографическую проекцию

$$h_+ \colon S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to R^2 \times 0 \subset R^3$$

из «северного полюса» $(0, 0, 1)$ сферы S^2 (см. рис. 3). Мы будем отождествлять $R^2 \times 0$ с плоскостью комплексных чисел.

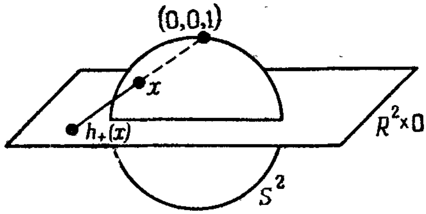


Рис. 3. Стереографическая проекция.

Полиномиальному отображению P плоскости $R^2 \times 0$ в себя соответствует отображение f сферы S^2 в себя, где

$$f(x) = h_+^{-1} \circ P \circ h_+(x) \quad \text{при} \quad x \neq (0, 0, 1),$$
$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Хорошо известно, что получившееся отображение f является гладким, даже в окрестности «северного полюса». Чтобы убедиться в этом, введем стереографическую проекцию h_- из «южного полюса» $(0, 0, -1)$ и положим

$$Q(z) = h_- \circ f \circ h_-^{-1}(z).$$

Из элементарной геометрии следует, что

$$h_+ \circ h_-^{-1}(z) = z/|z|^2 = 1/\bar{z}.$$

Если $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, то краткий подсчет показывает, что

$$Q(z) = z^n/(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \ldots + \bar{a}_n z^n).$$

Следовательно, отображение Q гладко в окрестности точки 0, поэтому отображение $f = h_-^{-1} \circ Q \circ h_-$ гладко в окрестности точки $(0, 0, 1)$.

Теперь заметим, что f имеет только конечное число критических точек, ибо P не является локальным диффеоморфизмом только в корнях производной $P'(z) = \sum a_{n-j} j z^{j-1}$, а так как P' — не тождественный нуль, то у него существует только конечное число корней. Множество регулярных значений отображения f связно (ибо это сфера, из которой уделено конечное множество точек). Следовательно, локально постоянная функция $\# f^{-1}(y)$ должна быть постоянной на этом множестве. Так как $\# f^{-1}(y)$ не может быть нулевой всюду, то это число нигде не равно нулю. Итак, f — отображение «на», а многочлен P должен иметь корень.

§ 2. ТЕОРЕМА САРДА И БРАУНА

В общем случае нельзя, конечно, надеяться на то, что множество критических значений гладкого отображения окажется конечным. Но все-таки это множество мало в смысле, указанном в следующей теореме, которую, следуя более ранней работе А. П. Морса, в в 1942 году доказал Сард (см. [32], [25]).

Теорема. *Пусть $f\colon U \to R^n$ — гладкое отображение, определенное на открытом множестве $U \subset R^m$, а*

$$C = \{x \in U \mid \text{ранг}\, df_x < n\}.$$

Тогда образ $f(C) \subset R^n$ имеет нулевую меру Лебега[1] [2].

---

[1]) Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть $f(C)$ n-мерными кубиками, общий объем которых меньше ε.

[2]) Это было доказано Брауном в 1935 г. Этот результат был вновь открыт Дубовицким в 1953 г. и Томом в 1954 г. (см. [7], [12], [40]).

Так как множество меры нуль не может содержать внутри себя непустое открытое множество, то дополнение $R^n \setminus f(C)$ должно быть всюду плотно в R^n.

Эта теорема будет доказана в § 3. Для доказательства существенно наличие у f большого числа производных (см. Уитни [41])[1]).

Нас будет интересовать главным образом случай $m \geqslant n$. Если $m < n$, то, очевидно, $C = U$. Следовательно, в этом случае теорема просто утверждает, что $f(U)$ имеет меру нуль.

Более общо, рассмотрим гладкое отображение $f\colon M \to N$ многообразия размерности m в многообразие размерности n. Обозначим через C множество всех таких $x \in M$, что производная

$$df_x\colon TM_x \to TN_{f(x)}$$

имеет ранг, меньший n (т. е. df_x не является отображением «на»). Тогда C будет называться множеством *критических точек*, $f(C)$ — множеством *критических значений*, а дополнение $N \setminus f(C)$ — множеством *регулярных значений* отображения f (это согласуется с нашими прежними определениями в случае $m = n$)[2]). Так как M можно покрыть счетным множеством

---

[1]) Требуемый класс гладкости таков: $f \in C^k$, где

$$k = \max(0, m-n) + 1. \qquad (*)$$

Именно в таком виде теорема доказана Сардом и Дубовицким. Доказательство имеется, например, в [35]. Уитни [41] и Д. Е. Меньшов показали, что предположения гладкости нельзя ослабить: в R^m существует функция класса C^{m-1} с $f(C) = R$. (Этот пример относится к случаю $n = 1$; из него нетрудно вывести существование соответствующих примеров и при бóльших n.) Если, с другой стороны, предполагать бóльшую гладкость, чем в $(*)$, то, как доказано в более поздних работах Сарда и Дубовицкого, утверждение о «малости» $f(C)$ можно несколько усилить: в зависимости от m, n и класса гладкости f эту «малость» можно характеризовать в терминах так называемых r-мерных мер Хаусдорфа. Впрочем, для чисто топологических целей все эти тонкости не нужны. — *Прим. ред.*

[2]) Наконец, точка $x \in M$ — *регулярная*, если в этой точке ранг $df_x = n$. Следует предупредить, что многие авторы исполь-

окрестностей, каждая из которых диффеоморфна открытому подмножеству из R^m, то мы имеем

Следствие (Браун). *Множество регулярных значений гладкого отображения f: $M \to N$ всюду плотно в N.*

Для того чтобы использовать это замечание, нам необходима следующая

Лемма 1. *Если f: $M \to N$ — гладкое отображение многообразия размерности m в многообразие размерности n, а $y \in N$ — регулярное значение отображения f, то множество $f^{-1}(y) \subset M$ — гладкое многообразие размерности $m-n$* [1]).

Доказательство. Пусть $x \in f^{-1}(y)$. Так как y — регулярное значение, то дифференциал df_x должен отображать TM_x на TM_y. Поэтому ядро $\mathfrak{N} \subset TM_x$ отображения будет $(m-n)$-мерным векторным пространством.

Пусть $M \subset R^k$. Выберем линейное отображение L: $R^k \to R^{m-n}$, невырожденное на подпространстве $\mathfrak{N} \subset TM_x \subset R^k$. Определим

$$F\colon M \to N \times R^{m-n}$$

как $F(\xi) = (f(\xi), L(\xi))$. Дифференциал dF_x, очевидно, задается формулой

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v)).$$

Поэтому он невырожден. Следовательно, F диффеоморфно отображает некоторую окрестность U точки x на окрестность V точки $(y, L(x))$. Отметим, что при отображении F множество $f^{-1}(y)$ является прообразом гиперплоскости $y \times R^{m-n}$. При этом F диффеоморфно отображает $f^{-1}(y) \cap U$ на $(y \times R^{m-n}) \cap V$.

зуют этот термин в другом смысле, называя регулярными те точки, где ранг $df_x = \min(m, n)$; тогда, естественно, и при $m < n$ могут быть регулярные точки. — *Прим. ред.*

[1]) Если только множество $f^{-1}(y)$ непусто. Эта тривиальная оговорка в дальнейшем часто подразумевается, но не приводится. Читателю предоставляется проследить, где она нужна, и убедиться, что по существу она ничего не меняет. — *Прим. ред.*

Это доказывает, что $f^{-1}(y)$ — гладкое многообразие размерности $m-n$.

В качестве примера мы можем дать простое доказательство того, что единичная сфера S^{m-1} является гладким многообразием. Рассмотрим функцию

$$f\colon R^m \to R, \quad f(x) = x_1^2 + \ldots + x_m^2.$$

Любое $y \neq 0$ является регулярным значением, а гладкое многообразие $f^{-1}(1)$ — это единичная сфера.

Если M' — многообразие, содержащееся в M, то, как уже было замечено, TM'_x — подпространство пространства TM_x при $x \in M'$. Тогда ортогональное дополнение подпространства TM'_x в TM_x будет $(m - m')$-мерным векторным пространством, которое называется пространством *нормальных к M' векторов* (*из*) *M в точке x*.

В частности, пусть $M' = f^{-1}(y)$, где y — регулярное значение отображения $f\colon M \to N$.

Лемма 2. *Ядро производной $df_x\colon TM_x \to TN_y$ в точности совпадает с касательным пространством $TM'_x \subset TM_x$ подмногообразия $M' = f^{-1}(y)$. Следовательно, df_x изоморфно отображает ортогональное дополнение к TM'_x на TN_y.*

Доказательство. Из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ y & \longrightarrow & N \end{array}$$

мы видим, что df_x переводит подпространство $TM'_x \subset TM_x$ в нуль. Сравнение размерностей показывает, что df_x *изоморфно отображает пространство нормальных к M' векторов на TN_y.*

Многообразия с краем

Усилив предыдущие леммы, можно распространить их на случай отображений гладких «многообразий с краем». Сперва рассмотрим замкнутое полупространство

$$H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m \mid x_m \geqslant 0\}.$$

По определению *край* ∂H^m — это гиперплоскость $R^{m-1} \times 0 \subset R^m$.

Определение. Подмножество $X \subset R^k$ называется *гладким m-мерным многообразием с краем*, если для каждого $x \in X$ существует окрестность $U \cap X$, диффеоморфная открытому подмножеству $V \cap H^m$ полупространства H^m[1]). Край ∂X — это множество всех тех точек из X, которые под действием таких диффеоморфизмов переходят в точки ∂H^m.

Не трудно показать, что ∂X — корректно определенное гладкое многообразие размерности $m-1$. *Внутренность* X многообразия с краем X, т. е. $X \setminus \partial X$, является гладким многообразием размерности m.

Касательное пространство TX_x определяется так же, как в § 1; даже если x — точка края, то TX_x — это все m-мерное векторное пространство.

Вот один из методов для построения примеров. Пусть M — многообразие без края, и пусть для функции g: $M \to R$ нуль является регулярным значением.

Лемма 3. *Множество всех $x \in M$, для которых $g(x) \geqslant 0$, является гладким многообразием с краем; край есть $g^{-1}(0)$.*

Доказательство в точности подобно доказательству леммы 1.

---

[1]) Здесь использована терминология, согласно которой открытое подмножество множества A, расположенного в евклидовом пространстве R^m, — это пересечение множества A с каким-нибудь открытым подмножеством $U \subset R^m$; такое пересечение, вообще говоря, не будет открытым подмножеством евклидова пространства. (Иногда говорят, что $A \cap U$ *относительно открыто* в A.) Аналогично, если $F \subset R^m$ — замкнутое множество, то говорят, что $F \cap A$ *замкнуто* в A. (Основания для такой терминологии см. в первом параграфе Уоллеса.)

Как понимать в данном контексте термин «диффеоморфизм», ясно из сказанного в начале § 1. — *Прим. ред.*

Пример. *Единичный шар* D^m, состоящий из всех таких $x \in R^m$, что

$$1-\sum x_i^2 \geqslant 0,$$

является гладким многообразием с краем, равным S^{m-1}.

Сейчас мы рассмотрим гладкое отображение $f\colon X \to N$ m-мерного многообразия с краем в n-мерное многообразие, причем $m > n$.

Лемма 4. *Если $y \in N$ является регулярным значением как для f, так и для ограничения $f|\partial X$, то $f^{-1}(y) \subset X$ является $(m-n)$-мерным гладким многообразием с краем. Далее, край $\partial(f^{-1}(y))$ в точности равен $f^{-1}(y) \cap \partial X$.*

Доказательство. Так как нам нужно доказать локальное свойство, то достаточно рассмотреть только частный случай — отображение $f\colon H^m \to R^n$, для которого $y \in R^n$ является регулярным значением. Пусть $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. Если $\bar{x}$ — внутренняя точка, то, как и раньше, $f^{-1}(y)$ в окрестности точки $\bar{x}$ является гладким многообразием.

Если $\bar{x}$ — точка края, то выберем гладкое отображение $g\colon U \to R^n$, определенное всюду в некоторой окрестности U точки $\bar{x}$ в R^m и совпадающее с f на $U \cap H^m$. Уменьшив, если это необходимо, окрестность U, мы можем считать, что g не имеет критических точек. Отсюда $g^{-1}(y)$ — гладкое многообразие размерности $m-n$.

Пусть $\pi\colon g^{-1}(y) \to R$ означает проекцию на координатную ось

$$\pi(x_1, \ldots, x_m) = x_m.$$

Мы утверждаем, что 0 является регулярным значением для π. Действительно, касательное пространство к $g^{-1}(y)$ в точке $x \in \pi^{-1}(0)$ совпадает с ядром производной

$$dg_x = df_x\colon R^m \to R^n,$$

а предположение о регулярности в точке x ограничения $f|\partial X$, т. е. (в рассматриваемом частном случае) $f|\partial H^m$, гарантирует нам, что это пространство не может целиком содержаться в $R^{m-1}\times 0$. Следовательно, множество $g^{-1}(y)\cap H^m = f^{-1}(y)\cap U$, состоящее из всех таких $x\in g^{-1}(y)$, что $\pi(x)\geqslant 0$, является, согласно лемме 3, гладким многообразием с краем $\pi^{-1}(0)$. Это завершает доказательство.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Мы сейчас используем этот результат для доказательства леммы, являющейся ключевой для классической теоремы Брауэра о неподвижной точке. Пусть X — компактное многообразие с краем.

Лемма 5. *Не существует гладкого отображения $f\colon X\to\partial X$, которое оставляло бы каждую точку края на месте*[1].

Доказательство (следуя Хиршу). Предположим, что такое отображение f существует. Пусть $y\in\partial X$ — регулярное значение отображения f. Так как y, конечно, является регулярным значением для тождественного отображения $f|\partial X$, то $f^{-1}(y)$ — гладкое одномерное многообразие с краем, состоящим из одной точки:

$$f^{-1}(y)\cap\partial X=\{y\}.$$

---

[1]) Подмножество $B\subset A$ называется *ретрактом* множества A, если существует непрерывное отображение $f\colon A\to B$, оставляющее каждую точку множества B на месте (пример: сторона квадрата). Это отображение называется *ретрагирующим отображением*, или *ретракцией*.

Если A, B — гладкие многообразия и ретрагирующее отображение тоже является гладким, то B можно назвать *гладким ретрактом* многообразия.

Таким образом, лемма 5 утверждает, что край компактного многообразия не является гладким ретрактом последнего. На самом деле он не является и просто ретрактом, без всяких условий гладкости. Читатель, решивший первые несколько задач, приведенных в конце книги, без труда докажет это самостоятельно. — *Прим. ред.*

Многообразие $f^{-1}(y)$ компактно, а так как компактными одномерными многообразиями являются только объединения непересекающихся окружностей[1]) и дуг[2]), то край $\partial(f^{-1}(y))$ должен состоять из четного числа точек. Это противоречие доказывает лемму.

В частности, единичный шар

$$D^n = \{x \in R^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$$

является компактным многообразием, краем которого служит сфера S^{n-1}. Следовательно, как частный случай мы доказали, что *тождественное отображение сферы S^{n-1} нельзя продолжить до гладкого отображения $D^n \to S^{n-1}$.*

Лемма 6. *Любое гладкое отображение g: $D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку* (т. е. точку $x \in D^n$, для которой $g(x) = x$).

Доказательство. Предположим, что g не имеет неподвижной точки. Для $x \in D^n$ определим $f(x) \in S^{n-1}$ как точку сферы S^{n-1}, лежащую на соединяющей x с $g(x)$ прямой и более близкую к x, нежели к $g(x)$ (рис. 4). Тогда f: $D^n \to S^{n-1}$ — гладкое отображение и $f(x) = x$ при $x \in S^{n-1}$, что противоречит лемме 5. (В гладкости f можно убедиться, получив путем непосредственной выкладки, что $f(x) = x + tu$, где

$$u = \frac{x - g(x)}{\| x - g(x) \|}, \quad t = -x \cdot u + \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2},$$

причем выражение под знаком радикала всегда положительно. Здесь и далее $\| x \|$ означает евклидову длину $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, а $x \cdot u$ — скалярное произведение $x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$.)

---

[1]) «Окружность», конечно, означает не окружность в смысле евклидовой метрики, а диффеоморфное ей одномерное многообразие, т. е. гладкую замкнутую кривую без самопересечений. — *Прим. ред.*

[2]) Доказательство дано в приложении.

Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Любое непрерывное отображение G: $D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Мы сведем эту теорему к лемме 6, аппроксимируя G гладким отображением. Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса[1]), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое полиномиальное отображение P_1: $R^n \to R^n$, что $\| P_1(x) -$

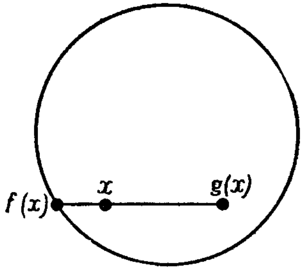


Рис. 4.

$- G(x) \| < \varepsilon$ при $x \in D^n$. Однако P_1 может переводить точки из D^n в точки, находящиеся вне D^n. Этого можно избежать, положив

$$P(x) = P_1(x)/(1+\varepsilon).$$

Ясно, что P отображает D^n в D^n и $\| P(x) - G(x) \| < 2\varepsilon$ при $x \in D^n$.

Предположим, что $G(x) \neq x$ для всех $x \in D^n$. Тогда непрерывная функция $\| G(x) - x \|$ должна иметь на D^n минимум $\mu > 0$. Выберем, как показано выше, такое полиномиальное отображение P: $D^n \to D^n$, что $\|P(x) - G(x)\| < \mu$ при всех $x \in D^n$. Тогда P — гладкое отображение шара D^n в себя, не имеющее неподвижных точек. Это противоречит лемме 6, чем и завершается доказательство теоремы.

Использованная здесь процедура часто применяется в более общих ситуациях: чтобы доказать

[1]) См., например, Дьедонне [13, стр. 160].

некоторое утверждение о непрерывных отображениях, мы сначала доказываем этот результат для гладких отображений, а затем пытаемся использовать аппроксимационную теорему, чтобы перейти к непрерывному случаю. (См. § 8, задача 4.)

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ САРДА[1]

Сначала напомним ее формулировку.

Теорема Сарда. *Пусть $f\colon U \to R^p$ — гладкое отображение, причем множество U открыто в R^n, и пусть C — множество его критических точек, т. е. множество всех тех $x \in U$, для которых*

$$\text{ранг}\, df_x < p.$$

Тогда $f(C) \subset R^p$ имеет меру нуль.

Замечание. Случай $n \leqslant p$ сравнительно прост (см. де Рам [30, стр. 30]). Однако мы дадим универсальное доказательство, в котором этот случай выглядит столь же плохим, как и остальные.

Доказательство будет вестись индукцией по n. Заметим, что утверждение имеет смысл при $n \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$. (По определению R^0 состоит из одной точки.) Начнем индукцию: теорема, несомненно, верна при $n = 0$.

Пусть $C_1 \subset C$ означает множество всех таких $x \in U$, для которых первый дифференциал df_x равен нулю. Вообще пусть C_i означает множество таких $x \in U$, что все частные производные функции f порядка $\leqslant i$ обращаются в точке x в нуль. Таким образом, мы имеем убывающую последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots .$$

Доказательство будет разбито на три шага.

---

[1]) Наше доказательство основывается на рассуждении, приведенном у Понтрягина в [29]. Детали у нас несколько проще из-за того, что мы предполагаем отображение f бесконечно дифференцируемым.

1-й шаг. Образ $f(C \setminus C_1)$ имеет меру нуль.

2-й шаг. Образ $f(C_i \setminus C_{i+1})$ имеет меру нуль при $i \geqslant 1$.

3-й шаг. Образ $f(C_k)$ имеет меру нуль для достаточно большого k.

(Замечание. Если f — действительное аналитическое отображение, то пересечение всех C_i пусто, кроме того случая, когда f постоянно на целой компоненте множества U. Следовательно, в этом случае достаточно сделать первые два шага.)

Доказательство. 1-й шаг. Этот первый шаг, по-видимому, самый трудный. Мы можем считать, что $p \geqslant 2$, так как $C = C_1$ при $p = 1$. Нам понадобится хорошо известная теорема Фубини, которая утверждает, что *измеримое множество*

$$A \subset R^p = R^1 \times R^{p-1}$$

должно иметь меру нуль, если оно пересекается с каждой гиперплоскостью (const) $\times R^{p-1}$ *по множеству* $(p-1)$*-мерной меры нуль* [1]) [2]).

Для каждого $\bar{x} \in C \setminus C_1$ мы ниже найдем такую открытую окрестность $V \subset R^n$, что $f(V \cap C)$ имеет меру нуль. А так как $C \setminus C_1$ покрывается счетным числом таких окрестностей, то отсюда непосредственно будет следовать, что мера $f(C \setminus C_1)$ равна нулю.

Так как $\bar{x} \notin C_1$, то существует некоторая частная производная, например $\partial f_1/\partial x_1$, которая отлична от нуля в точке $\bar{x}$. Рассмотрим отображение $h \colon U \to R^n$,

---

[1]) Простое доказательство можно найти у Стернберга [38, стр. 60—61] (там же есть и другое доказательство теоремы Сарда (стр. 53—64)). Стернберг предполагает, что A — компакт, но общий случай легко следует из этого частного.

[2]) Утверждение, выделенное курсивом, представляет собой весьма частный случай теоремы Фубини, которая в полном объеме здесь не понадобится. Читатель, не знакомый с теорией меры, может вместо слов «измеримое множество» подставить «множество, являющееся объединением счетного числа компактных множеств», ибо только к такому множеству данное утверждение будет применяться. — *Прим. ред.*

определенное формулой

$$h(x) = (f_1(x),\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Так как производная $dh_{\bar{x}}$ невырожденна, то h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $\bar{x}$ на открытое множество V'. Композиция $g = f \circ h^{-1}$ будет отображать V' в R^p. Заметим, что множество C' критических точек отображения g есть в точности $h(V \cap C)$; следовательно, множество $g(C')$ критических значений для g совпадает с $f(V \cap C)$.

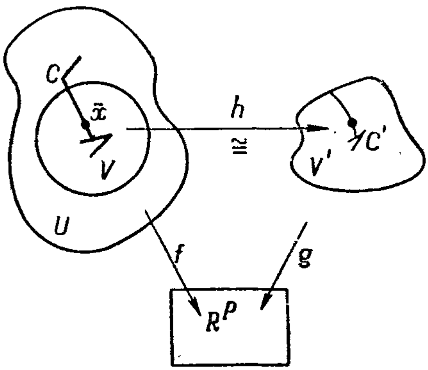


Рис. 5. Построение отображения g.

Заметим, что для каждой точки $(t,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in V'$ точка $g(t,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ принадлежит гиперплоскости $t \times R^{p-1} \subset R^p$, т. е. g переводит гиперплоскости в гиперплоскости. Пусть

$$g^t\colon\ (t \times R^{n-1}) \cap V' \to t \times R^{p-1}$$

обозначает ограничение отображения g на область в гиперплоскости $t \times R^{n-1}$. Заметим, что точка гиперплоскости $t \times R^{n-1}$ является критической для g^t тогда и только тогда, когда она — критическая точка для g, так как матрица частных производных отображения g представляется в виде

$$(\partial g_i/\partial x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\partial g_i^t/\partial x_j) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с предположением индукции, множество критических значений для g^t имеет меру нуль в $t \times R^{p-1}$. Поэтому множество критических значений для g пересекается с каждой гиперплоскостью по множеству меры нуль. Это множество $g(C')$ измеримо, так как оно может быть представлено в виде счетного объединения компактных подмножеств. Значит, по теореме Фубини множество

$$g(C') = f(V \cap C)$$

имеет меру нуль, и первый шаг завершен.

2-й шаг. Для каждого $\bar{x} \in C_k \setminus C_{k+1}$ существует $(k+1)$-я производная $\partial^{k+1} f_r / \partial x_{s_1} \ldots \partial x_{s_{k+1}}$, отличная от нуля в точке $\bar{x}$. Стало быть, функция

$$w(x) = \partial^k f_r / \partial x_{s_2} \ldots \partial x_{s_{k+1}}$$

обращается в точке $\bar{x}$ в нуль, но $\partial w / \partial x_{s_1}$ не равна нулю. Предположим для определенности, что $s_1 = 1$. Тогда отображение $h\colon U \to R^n$, определенное по формуле

$$h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_n),$$

диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $\bar{x}$ на открытое множество V'. Заметим, что h переводит $C_k \cap V$ в гиперплоскость $0 \times R^{n-1}$. Опять рассмотрим

$$g = f \circ h^{-1}\colon V' \to R^p.$$

Пусть

$$\bar{g}\colon (0 \times R^{n-1}) \cap V' \to R^p$$

обозначает ограничение отображения g. По предположению индукции множество критических значений у $\bar{g}$ имеет меру нуль в R^p. Но все точки множества $h(C_k \cap V)$ заведомо являются критическими точками для $\bar{g}$, так как в них все производные порядка $\leqslant k$ равны нулю. Поэтому множество

$$\bar{g}h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$$

имеет меру нуль.

Из того, что $C_k \setminus C_{k+1}$ покрывается счетным числом таких окрестностей V, следует, что $f(C_k \setminus C_{k+1})$ имеет нулевую меру.

3-й шаг. Пусть $I^n \subset U$ — куб с ребром δ.

Если k достаточно велико (точнее, $k > n/p - 1$), то мы докажем, что $f(C_k \cap I^n)$ имеет меру нуль. Так как C_k может быть покрыто счетным числом таких кубиков, то отсюда будет следовать, что множество $f(C_k)$ имеет меру нуль.

Используя теорему Тейлора, компактность куба I^n и определение C_k, мы можем написать

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h),$$

где

$$\| R(x, h) \| \leqslant c \| h \|^{k+1} \tag{1}$$

при $x \in C_k \cap I^n$, $x + h \in I^n$. Здесь c — постоянная, зависящая только от f и I^n. Теперь разделим I^n на r^n кубиков с ребром δ/r. Пусть I_1 — кубик получившегося разбиения, который содержит точку $x \in C_k$. Тогда любая точка I_1 может быть записана в виде $x + h$, где

$$\| h \| \leqslant \sqrt{n}\, (\delta/r). \tag{2}$$

Из формулы (1) следует, что $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром a/r^{k+1} с центром в точке $f(x)$, где $a = 2c(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$.

Следовательно, $f(C^k \cap I^n)$ содержится в объединении самое большее r^n кубиков, имеющих общий объем

$$V \leqslant r^n (a/r^{k+1})^p = a^p r^{n-(k+1)p}.$$

Если $k + 1 > n/p$, то очевидно, что V стремится к 0 при $r \to \infty$. Поэтому множество $f(C_k \cap I^n)$ должно иметь меру нуль. Доказательство теоремы Сарда закончено.

§ 4. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 2

Рассмотрим гладкое отображение $f\colon S^n \to S^n$. Напомним, что если y — регулярное значение, то $\# f^{-1}(y)$ означает число решений уравнения $f(x) = y$.

Мы докажем, что *класс вычетов* mod 2 *числа* $\#f^{-1}(y)$ *не зависит от выбора регулярного значения* y. Этот класс вычетов называется *степенью* mod 2 отображения f. Вообще это же самое определение годится и в случае произвольного гладкого отображения

$$f\colon M \to N,$$

где M — компактное многообразие без края, N связно и оба многообразия имеют одинаковую размерность. (Мы можем также считать, что N тоже является компактным многообразием без края, так как в противном случае степень отображения по mod 2 обязательно равнялась бы нулю.) Для доказательства мы введем два новых понятия.

Гладкая гомотопия и гладкая изотопия

Если $X \subset R^k$, то через $X \times [0, 1]$ обозначим подмножество[1]) пространства R^{k+1}, состоящее из всех (x, t), где $x \in X$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Два отображения

$$f, g\colon X \to Y$$

называются *гладко гомотопными* (сокращенно обозначаем $f \sim g$), если существует такое гладкое отображение $F\colon X \times [0, 1] \to Y$, что

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

для всех $x \in X$. В этом случае F называется *гладкой гомотопией*, связывающей f с g.

Отметим, что отношение гладкой гомотопности является отношением эквивалентности. Для доказательства транзитивности используем существование такой гладкой функции $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1]$, что

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/3,$$
$$\varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad 2/3 \leqslant t \leqslant 1.$$

---

[1]) Если M — гладкое многообразие без края, то $M \times [0,1]$ является гладким многообразием, край которого состоит из двух экземпляров многообразия M. Если бы у M был край, то точки края M привели бы к «угловым» точкам на $M \times [0,1]$.

(Например, $\varphi(t) = \lambda(t - {}^1/_3)/[\lambda(t - {}^1/_3) + \lambda({}^2/_3 - t)]$, где $\lambda(\tau) = 0$ при $\tau \leqslant 0$ и $\lambda(\tau) = \exp(-\tau^{-1})$ при $\tau > 0$.) Если F — гладкая гомотопия, связывающая f и g, то формула $G(x, t) = F(x, \varphi(t))$ определяет гладкую гомотопию G, для которой

$$G(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant {}^1/_3,$$
$$G(x, t) = g(x) \quad \text{при} \quad {}^2/_3 \leqslant t \leqslant 1.$$

Если $f \sim g$ и $g \sim h$, то с помощью этой конструкции легко доказать, что $f \sim h$.

Если f и g являются диффеоморфизмами X на Y, то мы можем также определить понятие «гладкой изотопии» между f и g. Она также будет отношением эквивалентности.

Определение. Диффеоморфизм f *гладко изотопен* диффеоморфизму g, если существует такая гладкая гомотопия F: $X \times [0, 1] \to Y$ между f и g, что для каждого $t \in [0, 1]$ соответствующее отображение

$$x \to F(x, t)$$

диффеоморфно отображает X на Y.

Из дальнейшего будет видно, что степень отображения mod 2 зависит только от его класса гладко гомотопных отображений.

Лемма о гомотопии. *Пусть f, g: $M \to N$ — гладко гомотопные отображения многообразия M в многообразие N той же размерности, причем M — компактное многообразие без края. Если $y \in N$ является регулярным значением как для f, так и для g, то*

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Доказательство. Пусть F: $M \times [0, 1] \to N$ — гладкая гомотопия, связывающая f и g. Сначала предположим, что y является регулярным значением также и для F. Тогда $F^{-1}(y)$ — компактное одномерное многообразие с краем, равным

$$F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = f^{-1}(y) \times 0 \cup g^{-1}(y) \times 1.$$

Таким образом, общее число точек края многообразия $F^{-1}(y)$ равно

$$\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y).$$

Вспомним (§ 2), что компактное одномерное многообразие всегда имеет четное число точек края. Таким образом, $\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y)$ четно. Отсюда

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Теперь предположим, что y не является регулярным значением отображения F. Напомним (§ 1), что

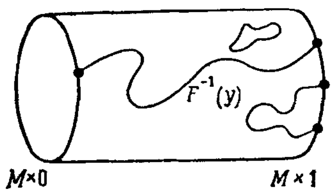


Рис. 6. Число точек края слева сравнимо с числом точек края справа mod 2.

$\# f^{-1}(y')$ и $\# g^{-1}(y')$ являются локально постоянными функциями от y' (пока мы остаемся вне множества критических значений). Поэтому существует такая окрестность $V_1 \subset N$ точки y, состоящая из регулярных значений отображения f, что

$$\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y)$$

для всех $y' \in V_1$, и аналогичная окрестность $V_2 \subset N$, в которой

$$\# g^{-1}(y') = \# g^{-1}(y)$$

для всех $y' \in V_2$. Выберем регулярное значение z отображения F в $V_1 \cap V_2$. Тогда

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \equiv \# g^{-1}(z) = \# g^{-1}(y),$$

что и завершает доказательство.

В дальнейшем нам будет необходима следующая

Лемма об однородности. *Пусть y и z — произвольные внутренние точки гладкого связного многообразия N.*

Тогда существует диффеоморфизм h: $N \to N$, гладко изотопный тождественному и переводящий y в z.

(В частом случае, когда $N = S^n$, доказательство очевидно: в качестве h выберем вращение, которое переводит y в z и оставляет неподвижными все векторы, ортогональные плоскости, натянутой на векторы y и z.)

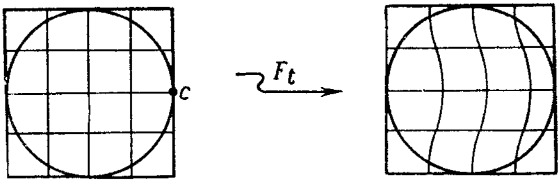


Рис. 7. Деформация единичного шара.

В общем случае доказательство ведется следующим образом. Сперва построим гладкую изотопию R^n на себя, которая:

1) оставляет неподвижными все точки вне единичного шара;

2) переводит начало координат в произвольно выбранную точку открытого единичного шара.

Пусть φ: $R^n \to R$ — такая гладкая функция, что

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{при} \quad \|x\| < 1,$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geqslant 1.$$

(Например, $\varphi(x) = \lambda(1 - \|x\|^2)$, где $\lambda(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\lambda(t) = \exp(-t^{-1})$ при $t > 0$.) Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i\varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n) \in S^{n-1}$ — произвольный фиксированный вектор, $\|c\| = 1$.

Для любого $\bar{x} \in R^n$ эта система имеет единственное решение $x = x(t)$, определенное при всех[1]) действительных t и удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = \bar{x}.$$

Мы будем обозначать это решение $x(t)$ через $F_t(\bar{x})$. Ясно, что:

1) $F_t(\bar{x})$ определено при всех t и $\bar{x}$ и гладко зависит от t и $\bar{x}$;

2) $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$;

3) $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$.

Поэтому каждое F_t является диффеоморфизмом пространства R^n на себя. Меняя t, мы видим, что для любого t диффеоморфизм F_t гладко изотопен тождественному отображению посредством изотопии, оставляющей неподвижными все точки вне единичного шара. Ясно, что при подходящем выборе c и t диффеоморфизм F_t будет переводить начало координат в любую наперед заданную точку открытого единичного шара.

Теперь рассмотрим связное многообразие N. Назовем две точки «изотопными», если существует гладкая изотопия, переводящая одну точку в другую. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Если y — внутренняя точка, то она имеет окрестность, диффеоморфную R^n; следовательно, приведенное выше рассуждение показывает, что любая достаточно близкая к y точка «изотопна» y. Другими словами, каждый класс «изотопных» внутренних точек N является открытым множеством и внутренность многообразия N разбита на непересекающиеся открытые классы «изотопных» точек. Но внутренность N — связное множество, поэтому может существовать только один такой класс. Это завершает доказательство.

Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела. Предположим, что M — компактное многообразие без края, N связно, а $f\colon M \to N$ гладко.

---

[1]) См. [22, § 2.4].

Теорема. *Если y и z — регулярные значения отображения f, то*

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2.$$

Этот общий класс вычетов, который называется степенью отображения f mod 2, *зависит только от содержащего f класса гладко гомотопных отображений, а не от самого f.*

Доказательство. Пусть даны регулярные значения y и z. Через h обозначим изотопный тождественному диффеоморфизм $h\colon N \to N$, который переводит y в z. Тогда z является регулярным значением для композиции $h \circ f$. Так как $h \circ f$ гомотопно отображению f, то, согласно лемме о гомотопии,

$$\# (h \circ f)^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2,$$

но

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ h^{-1}(z) = f^{-1}(y).$$

Отсюда

$$\# (h \circ f)^{-1}(z) = \# f^{-1}(y).$$

Поэтому

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим этот общий класс вычетов через $\deg_2(f)$. Предположим теперь, что f гладко гомотопно g. Согласно теореме Сарда, существует точка $y \in N$, являющаяся регулярным значением как для f, так и для g. Сравнение

$$\deg_2(f) \equiv \# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \equiv \deg_2(g) \pmod 2$$

показывает, что $\deg_2(f)$ инвариантен относительно гладкой гомотопии, что и заканчивает доказательство.

Примеры. Постоянное отображение (отображение в точку) $c\colon M \to M$ имеет четную степень mod 2. Тождественное отображение $I\colon M \to M$ имеет нечетную степень mod 2. Значит, *тождественное отображе-*

ние компактного многообразия без края не гомотопно постоянному.

В случае $M = S^n$ из этого результата следует, что не существует гладкого отображения $f\colon D^{n+1} \to S^n$, оставляющего каждую точку сферы неподвижной (т. е. сфера не является гладким «ретрактом» шара; см. § 2, лемма 5). Действительно, такое отображение давало бы гладкую гомотопию

$$F\colon S^n \times [0, 1] \to S^n, \quad F(t, x) = f(tx),$$

связывающую отображение в точку с тождественным отображением.

§ 5. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Для того чтобы определить степень отображения как целое число (а не вычет mod 2), мы должны ввести ориентацию.

Определения. Ориентация в действительном конечномерном векторном пространстве — это класс упорядоченных базисов относительно следующего отношения эквивалентности: базис $(b_1, \ldots, b_m)$ определяет *ту же ориентацию*, что и базис $(b'_1, \ldots, b'_m)$, если $b'_i = \sum a_{ij} b_j$ и $\det(a_{ij}) > 0$; он определяет *противоположную ориентацию*, если $\det(a_{ij}) < 0$. Таким образом, каждое векторное пространство положительной размерности имеет в точности две ориентации. Векторное пространство R^n имеет *стандартную* ориентацию, соответствующую базису

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$$

Для нульмерного векторного пространства удобно определить «ориентацию» как символ $+1$ или -1.

Ориентированное гладкое многообразие состоит из многообразия M и ориентаций, выбранных для каждого касательного пространства TM_x. При $m \geqslant 1$ требуется выполнение следующего условия согласования этих ориентаций: для каждой точки M должны существовать окрестность $U \subset M$ и диффеоморфизм h, отображающий U на открытое подмножество в R^m или H^m, который *сохраняет ориентацию* в том смысле, что для каждого $x \in U$ изоморфизм dh_x переводит [1]) выбранную ориентацию пространства TM_x в стандартную ориентацию пространства R^m.

Если M связно и ориентируемо, то оно имеет в точности две ориентации.

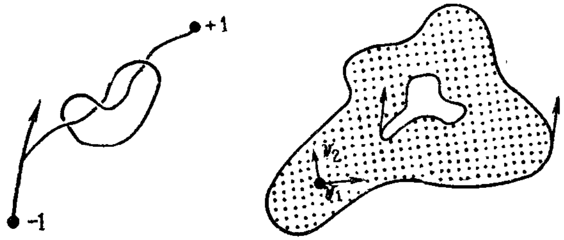


Рис. 8. Как ориентировать край.

Если M имеет край, то мы можем в точке x края различать три типа векторов касательного пространства TM_x:

1) векторы, касательные к краю; они образуют $(m-1)$-мерное подпространство $T(\partial M)_x \subset TM_x$;

2) векторы, направленные «наружу»; они образуют открытое полупространство, ограниченное подпространством $T(\partial M)_x$;

3) векторы, направленные «внутрь»; они образуют дополнительное полупространство.

Каждая ориентация многообразия M определяет ориентацию края ∂M, а именно: для $x \in \partial M$ выберем положительно ориентированный базис $(v_1, \ldots, v_m)$ в TM_x таким образом, чтобы $v_2, \ldots, v_m$ касались

---

[1]) Если $A: E \to E'$ — линейный изоморфизм двух конечномерных действительных векторных пространств и в E выбрана ориентация, то A переводит ее в некоторую ориентацию пространства E' согласно следующему правилу: пусть $(b_1, \ldots, b_m)$ — базис в E, принадлежащий выбранной в E ориентации; тогда в E' берется ориентация, соответствующая базису $(Ab_1, \ldots, Ab_m)$.

Заметим еще, что не на всяком многообразии можно ввести ориентацию и что многообразия, для которых это можно сделать, называются *ориентируемыми*, а остальные — *неориентируемыми*. — *Прим. ред.*

края (предполагается, что $m \geqslant 2$), а v_1 был направлен «наружу». Тогда базис $(v_2, \ldots, v_m)$ определяет требуемую ориентацию края ∂M в точке x.

Если размерность многообразия равна 1, то каждой точке края приписывается ориентация $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли положительно направленный вектор в точке x направлен «наружу» или «внутрь» (см. рис. 8).

Например, единичную сферу $S^{m-1} \subset R^m$ можно ориентировать как край шара D^m.

Степень Брауэра

Пусть M и N — два n-мерных ориентированных многообразия без края, и пусть

$$f\colon M \to N$$

— гладкое отображение. Если M компактно, а N связно, то степень отображения определяется следующим образом:

Пусть $x \in M$ — регулярная точка отображения f, т. е. $df_x\colon TM_x \to TN_{f(x)}$ — линейный изоморфизм ориентированных векторных пространств. Определим $\operatorname{sign} df_x$ равным $+1$ или -1 в зависимости от того, сохраняет df_x ориентацию или нет.

Для любого регулярного значения y определим

$$\deg(f;\, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} df_x.$$

Как и в § 1, целое число $\deg(f;\, y)$ — локально постоянная функция от y. Эта функция определена на открытом всюду плотном множестве многообразия N.

Теорема А. *Целое число* $\deg(f;\, y)$ *не зависит от выбора регулярного значения* y.

Оно будет называться *степенью отображения* f и обозначаться через $\deg f$.

Теорема В. *Если отображение* f *гладко гомотопно* g, *то* $\deg f = \deg g$.

По существу доказательство будет таким же, как и в § 4, только необходимо внимательно следить за ориентациями.

Сначала рассмотрим следующую ситуацию: предположим, что M является краем компактного ориентированного многообразия X и M ориентировано как край многообразия X.

Лемма 1. *Если f: $M \to N$ продолжается до гладкого отображения F: $X \to N$, то* $\deg(f;\ y) = 0$ *для любого регулярного значения y.*

Доказательство. Сначала предположим, что y является регулярным значением как для F, так и для $f = F|M$. Компактное одномерное многообразие $F^{-1}(y)$ представляет собой конечное объединение дуг и окружностей, причем граничные точки дуг лежат на $M = \partial X$. Пусть $A \subset F^{-1}(y)$ — одна из дуг, $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$.

Мы покажем, что

$$\operatorname{sign} df_a + \operatorname{sign} df_b = 0$$

и, следовательно (надо суммировать по всем таким отрезкам), что $\deg(f,\ y) = 0$.

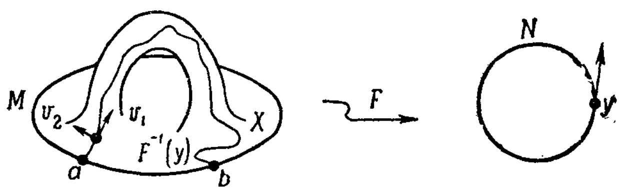


Рис. 9. Как ориентировать $F^{-1}(y)$.

Ориентации многообразий X и N следующим образом определяют ориентацию дуги A. Пусть $x \in A$, и пусть $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ — положительно ориентированный базис в TX_x, причем v_1 касается дуги A. *Тогда v_1 определяет требуемую ориентацию пространства TA_x в том и только в том случае, когда dF_x переводит $(v_2, \ldots, v_{n+1})$ в положительно ориентированный базис пространства TN_y.*

Пусть $v_1(x)$ обозначает положительно ориентированный единичный вектор, касательный к A в точке x. Ясно, что v_1 — гладкая функция и $v_1(x)$ направлен «наружу» в одной точке края (скажем, в b) и «внутрь» — в другой (в a).

Отсюда немедленно следует, что

$$\operatorname{sign} df_a = -1, \quad \operatorname{sign} df_b = +1,$$

а сумма равна нулю. Просуммировав по всем таким дугам, мы докажем, что $\deg(f;\ y) = 0$.

Более общо, предположим, что y_0 является регулярным значением для f, но не для F. Функция $\deg(f;\ y)$ постоянна в некоторой окрестности U точки y_0. Поэтому, как в § 4, мы можем выбрать внутри U регулярное значение y отображения F и заметить, что тогда

$$\deg(f;\ y_0) = \deg(f;\ y) = 0.$$

Это доказывает лемму 1.

Теперь рассмотрим некоторую гладкую гомотопию F: $[0, 1] \times M \to N$, связывающую два отображения $f(x) = F(0, x)$, $g(x) = F(1, x)$.

Лемма 2. *Степень* $\deg(g;\ y)$ *равна* $\deg(f;\ y)$ *для любого общего регулярного значения* y.

Доказательство. Многообразие $[0, 1] \times M$ может быть ориентировано как произведение двух ориентированных многообразий. Тогда его край будет состоять из $1 \times M$ (с правильной ориентацией) и $0 \times M$ (с неправильной ориентацией). Таким образом, степень отображения $F | \partial([0, 1] \times M)$ для регулярного значения y равна разности

$$\deg(g;\ y) - \deg(f;\ y),$$

а эта разность, согласно лемме 1, должна равняться нулю.

Остальная часть доказательства теорем A и B совершенно аналогична рассуждениям § 4. Для двух регулярных значений y и z отображения f: $M \to N$ выберем изотопный тождественному диффеоморфизм

$h\colon N \to N$, переводящий y в z. Тогда h будет сохранять ориентацию, и простая проверка показывает, что

$$\deg(f;\ y) = \deg(h \circ f;\ h(y)).$$

Отображение f гомотопно $h \circ f$. Из леммы 2 немедленно следует, что

$$\deg(h \circ f;\ z) = \deg(f;\ z).$$

Поэтому $\deg(f;\ y) = \deg(f;\ z)$, что заканчивает доказательство.

Примеры. Комплексная функция $z \to z^k$, $z \neq 0$, отображает единичную окружность на себя, причем степень этого отображения равна k (здесь k может быть произвольным целым числом — положительным, отрицательным или нулем).

Вырожденное отображение

$$f\colon M \to \text{постоянная} \in N$$

имеет степень нуль. Диффеоморфизм $f\colon M \to N$ имеет степень либо $+1$, либо -1 в зависимости от того, сохраняет или обращает он ориентацию. Поэтому *обращающий ориентацию диффеоморфизм компактного многообразия без края не может быть гладко гомотопен тождественному.*

Отражение $r_i\colon S^n \to S^n$,

$$r_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}),$$

дает пример диффеоморфизма, обращающего ориентацию. Центральная симметрия $S^n \to S^n$, $x \to -x$ имеет степень $(-1)^{n+1}$, в чем легко убедиться, представив ее в виде композиции $n+1$ отражений:

$$-x = r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n+1}(x).$$

Таким образом, *при четном n центральная симметрия сферы S^n не может быть гладко гомотопна тождественному отображению — факт, который не улавливается с помощью степени отображения* mod 2.

В качестве приложения мы, следуя Брауэру, покажем, что *на S^n тогда и только тогда существует* *нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле, когда n нечетно.* (Сравните рис. 10 и 11).

Определение. Гладкое *касательное векторное поле*[1]) *на* $M \subset R^k$ — это такое гладкое отображение v: $M \to R^k$, что $v(x) \in TM_x$ для всех $x \in M$. Для сферы $S^n \subset R^{n+1}$ последнее, очевидно, эквивалентно условию

$$(1) \qquad v(x) \cdot x = 0 \text{ при всех } x \in S^n,$$

где точка означает евклидово скалярное произведение в R^{n+1}.

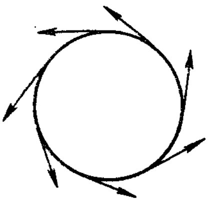


Рис. 10. Векторное поле на одномерной сфере, нигде не обращающееся в нуль.

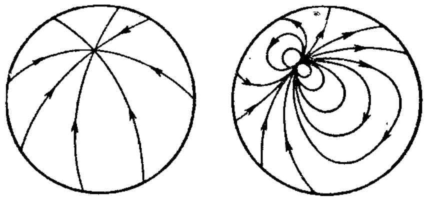


Рис. 11. Попытки построить такое поле на двумерной сфере.

Если $v(x)$ нигде че равно нулю, то мы можем также считать, что

$$(2) \qquad v(x) \cdot v(x) = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in S^n.$$

Во всяком случае, $\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$ будет векторным полем, удовлетворяющим этому условию. Таким образом, мы можем рассматривать v как гладкое отображение сферы S^n в себя.

Теперь определим гладкую гомотопию

$$F\colon S^n \times [0, \pi] \to S^n$$

[1]) Обычно слово «касательное» опускают, хотя на многообразии в евклидовом пространстве может понадобиться рассматривать и не касательные поля. — *Прим. ред.*

формулой $F(x, \theta) = x\cos\theta + v(x)\sin\theta$. Прямой подсчет показывает, что

$$F(x, \theta) \cdot F(x, \theta) = 1$$

и

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, \pi) = -x.$$

Таким образом, центральная симметрия оказалась гомотопной тождественному отображению, что невозможно, как мы видели, при четных n.

С другой стороны, если $n = 2k - 1$, то формула

$$v(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

определяет нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле на S^n. Утверждение полностью доказано.

В частности, отсюда следует, что при нечетном n центральная симметрия сферы S^n действительно гомотопна тождественному отображению. Знаменитая теорема, принадлежащая Хопфу, утверждает, что два отображения связного n-мерного многообразия в n-мерную сферу гладко гомотопны *тогда и только тогда*, когда их степени совпадают.

В § 7 мы докажем более общий результат, из которого будет следовать теорема Хопфа.

§ 6. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

В качестве дальнейшего приложения понятия степени отображения мы изучим векторные поля на других многообразиях.

Рассмотрим сначала открытое множество $U \subset R^m$ и гладкое векторное поле

$$v\colon U \to R^m$$

с изолированным нулем в точке $z \in U$. Функция

$$\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$$

отображает маленькую сферу с центром z в единичную сферу[1]). Степень этого отображения назовем *индексом* ι векторного поля v в точке z[2]).

На рис. 12 представлено несколько примеров таких векторных полей с индексами —1, 0, 1, 2. (С векторным полем v тесно связаны кривые, «касающиеся» поля v, которые получаются решением системы дифференциальных уравнений $dx_i/dt = v_i(x_1, \ldots, x_n)$. Именно эти кривые[3]) и изображены на рис. 12.)

Нуль произвольного индекса можно получить следующим образом: на плоскости комплексного переменного многочлен z^k определяет гладкое векторное поле с нулем индекса k в начале координат, а функция $\bar{z}^k$ определяет векторное поле с нулем индекса $-k$.

Мы должны доказать, что определение индекса инвариантно относительно диффеоморфизмов. Чтобы объяснить, что же это значит, рассмотрим более общую ситуацию. Пусть задано гладкое отображение $f\colon M \to N$ и на каждом многообразии определено векторное поле.

Определение. Векторные поля v на M и v' на N называются *f-связанными*, если дифференциал df_x переводит $v(x)$ в $v'(f(x))$ для всех $x \in M$.

---

[1]) Каждая сфера должна быть ориентирована как край соответствующего шара.

[2]) А также индексом нуля z этого векторного поля. Часто вместо «нуля» говорят об «особой точке» векторного поля, хотя с аналитической точки зрения никаких особенностей у поля v там может не быть; особенность имеется у соответствующего поля единичных касательных векторов $\bar{v}$.

Заметим попутно, что если в R^m на компактном гладком $(m-1)$-мерном многообразии M задано векторное поле v (не обязательно касательное), нигде на M не обращающееся в нуль, то степень отображения

$$M^{m-1} \to S^{m-1}, \quad x \to \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

называется *вращением поля v на M*. С ним встречаются не только при определении индекса, но и в других случаях; см., например, лемму 3 ниже. — *Прим. ред.*

[3]) *Их называют интегральными кривыми, траекториями или силовыми линиями поля v. — Прим. ред.*

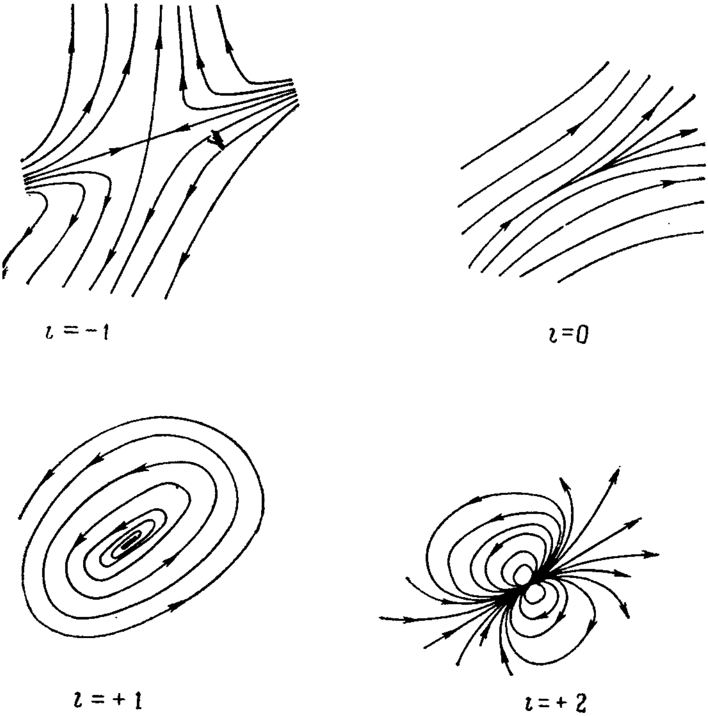


Рис. 12. Примеры векторных полей на плоскости (ι — индекс).

Если f — диффеоморфизм, то v', конечно, однозначно определяется по v. В этом случае мы будем писать

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}.$$

Лемма 1. *Предположим, что векторное поле v на U f-связано с полем*

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}$$

на U' с помощью диффеоморфизма f: $\to U'$. Тогда индекс поля v в изолированном нуле z, ндексу поля v' в $f(z)$.

Предположив, что лемма 1 доказана, мы можем следующим образом ввести понятие индекса векторного поля w на произвольном многообразии M. Если g: $U \to M$ — параметризация окрестности точки z на M, то *индекс* ι векторного поля w определяется как индекс соответствующего векторного поля $dg^{-1} \circ w \circ g$ на U в точке $g^{-1}(z)$. Из леммы 1, очевидно, будет следовать, что индекс ι корректно определен [1]).

Доказательство леммы 1 будет основано на доказательстве совсем другого утверждения.

Лемма 2. *Любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f евклидова пространства R^m гладко изотопен тождественному.*

(Напротив, для многих значений m существуют сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы сферы S^m, которые не являются гладко изотопными тождественному; см. [20, стр. 41].)

Доказательство. Мы можем считать, что $f(0) = 0$. Так как дифференциал в нуле можно определить как

$$df_0(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{t},$$

то естественно ввести изотопию

$$F: R^m \times [0, 1] \to R^m,$$

определяемую формулами

$$F(x, t) = f(tx)/t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1,$$
$$F(x, 0) = df_0(x).$$

Для доказательства гладкости отображения F при $t = 0$ мы перепишем f в виде [2])

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \ldots + x_m g_m(x),$$

[1]) То есть его определение не зависит от выбора параметризации. — *Прим. ред.*

[2]) См., например, [22, стр. 14], а также упр. 4.11 из Уоллеса. — *Прим. ред.*

где $g_1, \ldots, g_m$ — некоторые гладкие функции, и заметим, что

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \ldots + x_m g_m(tx)$$

для всех значений t.

Поэтому f изотопно линейному отображению df_0, которое, очевидно, изотопно тождественному[1]). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Мы можем считать, что $z = f(z) = 0$ и U — выпуклая окрестность.

Если f сохраняет ориентацию, то, проведя в точности те же самые рассуждения, мы построим такое однопараметрическое семейство вложений[2])

$$f_t \colon U \to R^m,$$

что f_0 — тождественное вложение, $f_1 = f$ и $f_t(0) = 0$ при всех t. Пусть v_t — векторное поле $df_t \circ v \circ f_t^{-1}$ на $f_t(U)$, f_t-связанное с полем v на U. Все эти векторные поля определены и не обращаются в нуль на достаточно малой сфере с центром в 0. Следовательно, индекс поля $v = v_0$ в 0 должен совпадать с индексом поля $v' = v_1$ в 0, что доказывает лемму 1 для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов.

---

[1]) Пусть A — матрица с положительным определителем; тогда существует такая матрица $A(t)$, которая гладко зависит от t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и ни при одном t не вырождается, причем $A(0) = A$ и $A(1)$ — единичная матрица. Действительно, A можно представить в виде $A = SU$, где S — положительно определенная симметричная матрица, а U — ортогональная матрица с определителем 1. (Именно, S определяется из условия $AA' = S^2$, где штрих обозначает транспонирование.) Поэтому наше утверждение достаточно доказать отдельно для S и U. Это проще всего сделать, приведя S к диагональному виду, а U — к виду, состоящему из «блоков» $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ и диагональных элементов ± 1; при этом -1 войдет четное число раз, а $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — это «блок» указанного выше вида с $\varphi = \pi$, поэтому можно считать, что имеются только «блоки» и диагональные единицы. — *Прим. ред.*

[2]) См. Уоллес, определение 3.2. — *Прим. ред.*

Среди диффеоморфизмов, обращающих ориентацию, достаточно исследовать случай отражения ρ. Тогда

$$v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1},$$

а для соответствующего отображения $\bar{v}'(x) = \frac{v'(x)}{\|v'(x)\|}$ ›еры радиуса ε в единичную сферу будет справедливо соотношение

$$\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho^{-1}.$$

Очевидно, степень отображения $\bar{v}'$ равна степени отображения $\bar{v}$, что завершает доказательство леммы 1.

Мы сейчас получим классический результат, относящийся к следующей ситуации: M — компактное многообразие, w — гладкое векторное поле на M с изолированными нулями. *Если M имеет край, то требуется, чтобы векторное поле w в каждой точке края было направлено наружу.*

Теорема Пуанкаре — Хопфа. *Сумма $\sum\iota$ индексов нулей такого векторного поля равна эйлеровой характеристике*[1])

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \text{ ранг } H_i(M).$$

В частности, эта сумма индексов является топологическим инвариантом многообразия M, т. е. она не зависит от конкретного выбора векторного поля.

(Двумерный вариант этой теоремы был доказан Пуанкаре в 1885 г. Полностью теорема была доказана Хопфом [54] в 1926 г., вслед за частичными результатами Брауэра и Адамара.)

Мы докажем часть этой теоремы и дадим набросок остального. Сначала рассмотрим частный случай — компактную область в R^m.

---

[1]) Здесь $H_i(M)$ обозначает i-ю группу гомологий многообразия. Это наша первая и последняя ссылка на теорию гомологий. (Читатель, не знакомый с теорией гомологий, может ограничиться таким вариантом: сумма индексов для всех векторных полей с изолированными нулями (направленных на крае наружу, если есть край) одна и та же. — *Ред.*)

Пусть $X \subset R^m$ — компактное m-мерное многообразие с краем. Гауссово отображение[1])

$$g\colon \partial X \to S^{m-1}$$

ставит в соответствие каждой точке $x \in \partial X$ единичный вектор, нормальный к ∂X в точке x и направленный наружу многообразия X.

Лемма 3 (Хопф). *Если $v\colon X \to R^m$ — гладкое векторное поле с изолированными нулями, направленное на крае наружу многообразия X*[2]), *то сумма ин-*

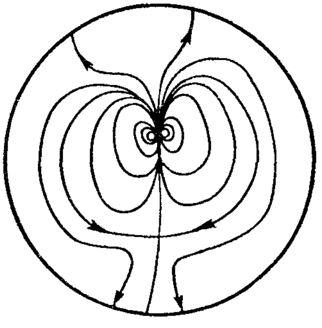


Рис. 13. Пример векторного поля с суммой индексов $+1$.

дексов $\sum \iota$ равна степени гауссова отображения края ∂X в S^{m-1}. В частности, $\sum \iota$ не зависит от выбора v.

Например, если v — векторное поле на шаре D^m, направленное на крае наружу, то $\sum \iota = 1$ (см. рис. 13).

Доказательство. Вырезав шар радиуса ε вокруг каждого нуля, мы получим новое многообразие с краем. Отображение $\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$ переводит это многообразие в S^{m-1}. Следовательно, сум-

---

[1]) Его называют также *нормальным*. — *Прим. ред.*

[2]) И, в частности, нигде на ∂X не обращающееся в нуль. — *Прим. ред.*

ма степеней ограничений отображения $\bar{v}$ на различные компоненты края равна 0 [1]). Но $\bar{v}|\partial X$ гомотопно g [2]). Сумма же степеней ограничений на остальные компоненты края равна $-\sum \iota$. (Знак минус стоит перед суммой ввиду неправильной ориентации каждой маленькой сферы [3]).)

Поэтому

$$\deg g - \sum \iota = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Степень отображения g известна также под названием «интегральной кривизны» гиперповерхности ∂X, так как она пропорциональна интегралу по ∂X от гауссовой кривизны. Она равна, конечно, эйлеровой характеристике многообразия X. Для нечетного m она равна также половине эйлеровой характеристики многообразия ∂X [4]).

Прежде чем распространить этот результат на другие многообразия, необходимы некоторые приготовления.

---

[1]) Используется лемма 1 из § 5 и тот простой факт, что для несвязного многообразия M степень отображения равна сумме степеней ограничений этого отображения на компоненты связности многообразия M. — *Прим. ред.*

[2]) Достаточно рассмотреть $\dfrac{(1-t)\,\bar{v}+tg}{\|(1-t)\,\bar{v}+tg\|}$. Знаменатель нигде не обращается в нуль, так как ни в одной точке $x \in \partial X$ направление одного из этих двух полей не противоположно направлению другого. — *Прим. ред.*

[3]) Пусть $D_\varepsilon^m(x)$ — шар радиуса ε с центром в x, а $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ — ограничивающая его сфера. Обозначим нули векторного поля v через $x_1, \ldots, x_N$. Индекс точки x_i — это степень отображения $x \to \dfrac{v(x)}{\|v(x)\|}$ сферы $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ в S^{m-1}, где сферы должны быть ориентированы как края соответствующих шаров. Но ориентация, которую $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ получает как край многообразия $Y = X \setminus \bigcup\limits_i D_\varepsilon^m(x_i)$, противоположна ориентации ее как края шара $D_\varepsilon^m(x_i)$, потому что если в какой-нибудь точке сферы вектор направлен наружу $D_\varepsilon^m(x_i)$, то тот же вектор в этой же точке направлен внутрь Y. — *Прим. ред.*

[4]) См. § 8, задача 20. — *Прим. ред.*

Естественно попытаться вычислить индекс векторного поля v в нуле z с помощью производных поля v в точке z. Рассмотрим сначала векторное поле v на открытом множестве $U \subset R^m$. Будем рассматривать его как отображение $U \to R^m$, так что определен дифференциал dv_z.

Определение. Векторное поле v называется *невырожденным в точке* z, если линейное преобразование dv_z невырожденно.

В этом случае z — изолированный ну

Лемма 4. *Индекс векторного поля* v *в невырожденном нуле* z *равен либо* $+1$, *либо* -1, *в зависимости от того, положителен или отрицателен определитель дифференциала* dv_z.

Доказательство. Будем рассматривать как диффеоморфизм некоторой выпуклой окрестности U_0 точки z в пространство R^m. Можно считать, что $z = 0$. Если отображение v сохраняет ориентацию, то мы уже видели, что $v|U_0$ может быть гладко продеформировано в тождественное отображение, причем никаких новых нулей не появится. (См. леммы 1, 2.) Поэтому индекс равен $+1$.

Если v обращает ориентацию, то совершенно аналогичным образом оно может быть продеформировано в отражение; отсюда $\iota = -1$.

Более общо, рассмотрим нуль z векторного поля w на многообразии $M \subset R^k$. Будем рассматривать w как отображение M в R^k с дифференциалом $dw_z \colon TM_z \to R^k$

Лемма 5. *Дифференциал* dw_z *в действительности переводит* TM_z *в подпространство* $TM_z \subset R^k$; *поэтому* dw_z *можно рассматривать как линейное преобразование пространства* TM_z. *Если это линейное преобразование имеет определитель* $D \neq 0$, *то* z *является изолированным нулем поля* w. *Индекс точки* z *равен* $+1$ *или* -1 *в зависимости от того, полож гелен* D *или отрицателен.*

Доказательство. Пусть $h\colon U \to M$ — параметризация некоторой окрестности точки z, e^i обозначает i-й базисный вектор в R^m, и пусть

$$t^i = dh_u(e^i) = \partial h/\partial u_i,$$

так что векторы $t^1, \ldots, t^m$ образуют базис касательного пространства $TM_{h(u)}$. Нам нужно вычислить, куда переходит вектор $t^i = t^i(u)$ под действием линейного преобразования $dw_{h(u)}$. Сначала заметим, что

$$dw_{h(u)}(t^i) = d(w \circ h)_u(e^i) = \partial w(h(u))/\partial u_i. \tag{1}$$

Пусть $v = \Sigma v_j e^j$ — векторное поле на U, которое h-связано с векторным полем w на M. По определению $v = dh^{-1} \circ w \circ h$ и

$$w(h(u)) = dh_u(v) = \sum v_j t^j.$$

Поэтому

$$\partial w(h(u))/\partial u_i = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)\, t^j + \sum_j v_j (\partial t^j/\partial u_i). \tag{2}$$

Комбинируя формулы (1) и (2), мы получаем в нуле $h^{-1}(z)$ векторного поля v следующую формулу:

$$dw_z(t^i) = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)\, t^j. \tag{3}$$

Таким образом, dw_z отображает TM_z в себя, а определитель D этого преобразования $TM_z \to TM_z$ равен определителю матрицы $(\partial v_j/\partial u_i)$, что вместе с леммой 4 завершает доказательство.

Теперь мы рассмотрим компактное многообразие без края $M \subset R^k$. Пусть N_ε обозначает замкнутую ε-окрестность многообразия M, т. е. множество всех таких $x \in R^k$, что $\| x - y \| \leqslant \varepsilon$ для некоторого $y \in M$. Можно показать, что N_ε будет гладким многообразием с краем при достаточно малых ε (см. § 8, задача 11).

Теорема 1. *Для любого векторного поля v на M, имеющего только невырожденные нули, сумма* *индексов* $\sum \iota$ *равна степени гауссова отображения*[1])

$$g\colon \partial N_\varepsilon \to S^{k-1}.$$

В частности, эта сумма не зависит от выбора векторного поля v.

Доказательство. Для $x \in N_\varepsilon$ через $r(x) \in M$ мы обозначим ближайшую к x точку многообразия M (см. § 8, задача 12). Заметим, что вектор $x - r(x)$ перпендикулярен касательному пространству к M

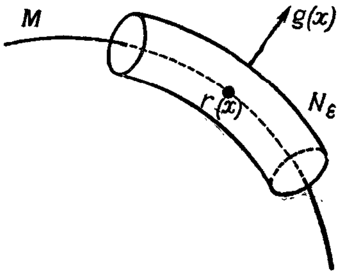


Рис. 14. ε-окрестность многообразия M.

в точке $r(x)$, иначе $r(x)$ не была бы ближайшей к x точкой многообразия M. Если ε достаточно мало, то $r(x)$ — гладкая и корректно определенная функция.

Мы будем также рассматривать квадратичную функцию расстояния

$$\varphi(x) = \| x - r(x) \|^2.$$

Простой подсчет показывает, что градиент функции φ задается соотношением

$$\operatorname{grad} \varphi = 2(x - r(x)).$$

Отсюда для каждой точки x поверхности уровня $\partial N_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$ внешний единичный нормальный век-

---

[1]) Другая интерпретация этой степени дана Аллендорфером и Фенхелем: степень отображения g может быть выражена через интеграл по M от подходящего скаляра кривизны; таким образом получается m-мерный вариант классической теоремы Гаусса — Бонне (см. [2], [48], а также Чжень [57]).

тор задается равенством

$$g(x) = \operatorname{grad} \varphi / \|\operatorname{grad} \varphi\| = \frac{1}{\varepsilon}(x - r(x)).$$

Продолжим v до векторного поля w на окрестности N_ε, полагая

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

Тогда w направлено «наружу» на крае, так как скалярное произведение $w(x) \cdot g(x) = \varepsilon > 0$.

Заметим, что w обращается в нуль только в нулях поля v на M; это явствует из того, что два слагаемых $x - r(x)$ и $v(r(x))$ взаимно ортогональны. Вычислив дифференциал w в нуле $z \in M$, найдем, что

$$dw_z(h) = dv_z(h) \quad \text{для всех} \quad h \in TM_z,$$
$$dw_z(h) = h \quad \text{для} \quad h \in TM_z^\perp.$$

Поэтому определитель отображения dw_z равен определителю отображения dv_z. Следовательно, индекс поля w в нуле z равен индексу ι векторного поля v в точке z.

Но, в соответствии с леммой 3, сумма индексов $\sum \iota$ равна степени g. Тем самым теорема 1 доказана.

Примеры. На сфере S^m существует векторное поле, направленное на «север» в каждой точке[1]. В южном полюсе векторы направлены от полюса (индекс равен $+1$), а в северном полюсе сходятся внутрь (индекс равен $(-1)^m$). Поэтому инвариант $\sum \iota$ равен нулю для нечетных m и 2 для четных. Это дает новое доказательство того факта, что на четномерной сфере любое векторное поле имеет нуль.

Для нечетномерного многообразия без края инвариант $\sum \iota$ равен нулю, так как, если заменить

[1]) Например, v можно определить формулой $v(x) = p - (p \cdot x)x$, где p — северный полюс (см. рис. 11).

векторное поле v на $-v$, то каждый индекс умножится на $(-1)^m$, а равенство

$$\sum \iota = (-1)^m \sum \iota$$

для нечетных m влечет за собой

$$\sum \iota = 0.$$

Замечание. Имеется теорема Хопфа, утверждающая, что если для связного многообразия M имеет место равенство $\sum \iota = 0$, то на M существует векторное поле, нигде не обращающееся в нуль[1]).

Чтобы доказать теорему Пуанкаре — Хопфа в полном объеме, необходимо сделать еще три шага.

1-й шаг. *Отождествление инварианта $\sum \iota$ с эйлеровой характеристикой* $\chi(M)$. Достаточно построить только один какой-нибудь пример невырожденного векторного поля на M, для которого легко проверялось бы, что $\sum \iota = \chi(M)$. Наиболее удобный способ построения таков.

Согласно М. Морсу, на M обязательно существует функция с действительными значениями, «градиент» которой является невырожденным векторным полем[2]). Кроме того, Морс показывает, что сумма индексов такого градиентного векторного поля равна эйлеровой характеристике многообразия M. Подробное изложение этих рассуждений читатель может найти у Милнора [22, стр. 40, 47].

2-й шаг. *Доказательство теоремы для векторных полей с вырожденными нулями.* Рассмотрим сначала векторное поле v на открытом множестве U, имеющее изолированный нуль в точке z. Если функция

$$\lambda : U \to [0, 1]$$

равна 1 в малой окрестности N_1 точки z и ра[illegible] нулю вне несколько большей окрестности N, а y доста-

[1]) См. § 8, задача 21*. — *Прим. ред.*
[2]) См. § 8, задача 19*. — *Прим. ред.*

точно малое регулярное значение для v, то векторное поле

$$v' = v(x) - \lambda(x)\,y$$

невырожденно[1]) внутри N. Сумма индексов для нулей, лежащих внутри N, может быть вычислена через степень отображения

$$\bar{v}\colon \partial N \to S^{m-1};$$

поэтому она не изменилась после замены v на v'.

Более общо, рассмотрим векторные поля на компактном многообразии M. Локально применяя эти рассуждения, мы видим, что *любое векторное поле с изолированными нулями можно заменить невырожденным векторным полем, не изменив* $\Sigma\iota$.

3-й шаг. *Многообразия с краем. Если* $M \subset R^k$ имеет край, то любое векторное поле, направленное на ∂M «наружу», опять можно так продолжить на окрестность N_ε, чтобы на ∂N_ε оно было направлено наружу. Однако возникают некоторые трудности с гладкостью из-за края M. Так, N_ε не является гладким (в нашем смысле, т. е. дифференцируемым класса C^∞) многообразием, а только многообразием класса C^1.

Продолжение w, если определять его, как и выше, формулой $w(x) = v(r(x)) + (x - r(x))$, будет только непрерывным векторным полем вблизи ∂M. Тем не менее доказательство можно довести до конца либо показав, что наши сильные требования гладкости в действительности не нужны, либо другими методами[2]).

---

[1]) Ясно, что v' невырожденно внутри N_1; но если y доста- т 1но мало, то v' вообще не будет обращаться в нуль на $N \setminus N_1$

[2]) При первом варианте наиболее «неприятной» является, вероятно, «обосновательская» деятельность, вроде доказательства C^1-гладкости N_ε, однозначной определенности и непрерывности $r(x)$ и тому подобные простые, но громоздкие рассуждения. О непрерывных векторных полях см. § 8, задача 18*. Другой вариант - 8, задача 20*. — *Прим. ред.*

§ 7. ОСНАЩЕННЫЙ БОРДИЗМ[1]; КОНСТРУКЦИЯ ПОНТРЯГИНА

Степень отображения $M \to M'$ определена только в том случае, когда M и M' — ориентированные многообразия одинаковой размерности. Мы будем изучать предложенное Понтрягиным обобщение степени, определяемое для произвольного гладкого отображения

$$f\colon M \to S^p$$

произвольного компактного многообразия без края в сферу. Сначала дадим несколько определений.

Пусть N и N' — компактные n-мерные подмногообразия M, причем $\partial N = \partial N' = \partial M = \varnothing$. Разность размерностей $m - n$ называется *коразмерностью* подмногообразий.

Определение. *Подмногообразие N бордантно N'* в M, если подмножество

$$N \times [0, \varepsilon) \cup N' \times (1 - \varepsilon, 1]$$

многообразия $M \times [0, 1]$ можно так расширить до компактного многообразия

$$X \subset M \times [0, 1],$$

что

$$\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1,$$

---

[1]) Следует предупредить о некотором разнобое в терминологии. Бордизмы еще несколько лет назад называли (а иногда и сейчас по старой памяти называют) кобордизмами. Такой терминологией пользовался и Милнор в оригинале этой книги. Недавнее изменение терминологии вызвано тем, что бордизмы (бывшие кобордизмы) в некотором отношении аналогичны гомологиям; термин «кобордизм» резервируется для другого понятия, примерно так же связанного с бордизмами, как когомологии с гомологиями.

Далее, термин «бордизм» чаще употребляется в словосочетании «*класс бордизмов*» (т. е. класс бордантных друг другу подмногообразий многообразия M). Вместе с тем раньше слово «бордизм» (в то время — «кобордизм») означало тройку (X, N, N') с описанными выше свойствами. В переводе было решено сохранить «бордизмы» только в первом словосочетании. Что же до X, то я рискнул воспользоваться словом, которое топологи постоянно употребляют устно: они называют X «пленкой» (подробнее: пленкой, соединяющей N с N' или реализующей их бордантность). — *Прим. ред.*

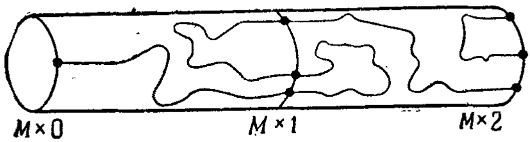


Рис. 15. Склеивание двух бордизмов внутри M.

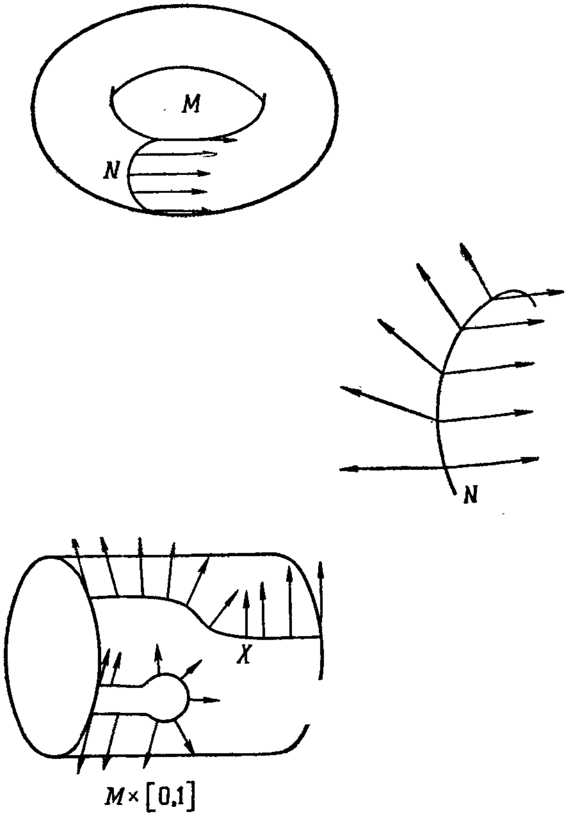


Рис. 16. Оснащенные подмногообразия и оснащенная пленка.

а X (которое в дальнейшем будет называться «пленкой») не пересекается с $M \times 0 \cup M \times 1$, кроме точек края ∂X.

Ясно, что бордизм является отношением эквивалентности (см. рис. 15).

Определение. *Оснащением* подмногообразия $N \subset M$ называется гладкая функция $\mathfrak{v}$, ставящая в соответствие каждой точке $x \in N$ базис

$$\mathfrak{v}(x) = (v^1(x), \ldots, v^{m-n}(x))$$

пространства $TN_x^{\perp} \subset TM_x$ векторов, нормальных в точке x к N в многообразии M. (см. рис. 16). Пара $(N, \mathfrak{v})$ *называется оснащенным подмногообразием* многообразия M. Два оснащенных подмногообразия $(N, \mathfrak{v})$ и $(N', \mathfrak{w})$ *оснащенно бордантны*, если существуют такая пленка $X \subset M \times [0, 1]$, соединяющая N и N', и такое оснащение $\mathfrak{u}$ пленки X, что

$$u^i(x, t) = (v^i(x), 0) \quad \text{для} \quad (x, t) \in N \times [0, \varepsilon),$$
$$u^i(x, t) = (w^i(x), 0) \quad \text{для} \quad (x, t) \in N' \times (1-\varepsilon, 1].$$

Это опять отношение эквивалентности[1]).

---

[1]) Так как далее речь будет идти о бордантности многообразий, являющихся прообразами регулярных значений, то целесообразно уточнить, что это означает в том случае, когда один из этих прообразов пуст.

По большей части Милнор дает такие формулировки, которые сохраняются и в этом случае, если условиться чисто формально называть пустое множество $\varnothing$ «компактным n-мерным подмногообразием многообразия M» (с n, зависящим от обстановки. Когда речь идет об оснащении, то ввиду отсутствия в $\varnothing$ точек сопоставлять им базисы не приходится.) Так, можно всюду в приведенном выше определении бордантности подмногообразий N и N' заменить N' на $\varnothing$; получится формулировка некоторого свойства подмногообразия $N \subset M$. Формальная замена N' на $\varnothing$ не совсем годится только в самом названии этого свойства: если N этим свойством обладает, то обычно говорят, не «N бордантно в M пустому множеству», а «N бордантно в M нулю» или «N ограничивает в M». Ради ясности повторим определения для этого случая.

Компактное n-мерное подмногообразие $N \subset M$, где $\partial N = \partial M = \varnothing$, *бордантно нулю в* M (*ограничивает в* M), если в $M \times [0,1]$ подмножество $N \times [0, \varepsilon)$ можно расширить до «натя-

Рассмотрим теперь гладкое отображение $f\colon M \to S^p$ и его регулярное значение $y \in S^p$. Отображение f следующим образом индуцирует оснащение многообразия $f^{-1}(y)$. Выберем положительно ориентированный базис $\mathfrak{v} = (v^1, \ldots, v^p)$ касательного пространства $T(S^p)_y$. Напомним, что для каждого $x \in f^{-1}(y)$ (см. стр. 194) производная

$$df_x\colon TM_x \to T(S^p)_y$$

переводит подпространство $Tf^{-1}(y)_x$ в 0, а его ортогональное дополнение $Tf^{-1}(y)_x^{\perp}$ изоморфно отображает на $T(S^p)_y$. Поэтому существует единственный вектор

$$w^i(x) \in Tf^{-1}(y)_x^{\perp} \subset TM_x,$$

который переводится в v^i под действием df_x. Для полученного оснащения $w^1(x), \ldots, w^p(x)$ многообразия $f^{-1}(y)$ будет удобно использовать обозначение $\mathfrak{w} = f^*\mathfrak{v}$.

Определение. Оснащенное многообразие $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ будет называться *многообразием Понтрягина*, соответствующим отображению F.

Конечно, у f есть много многообразий Понтрягина. Они получаются при различном выборе y и $\mathfrak{v}$, но все они принадлежат к одному и тому же классу оснащенных бордизмов.

Теорема А. *Если y' — другое регулярное значение для f, а $\mathfrak{v}'$ — положительно ориентированный базис*

нутой на $N \times 0$ пленки X», т. е. до такого компактного подмногообразия $X \subset M \times [0, 1]$, что $\partial X = N \times 0$ и X не пересекается с $M \times 0$ и $M \times 1$, кроме точек края ∂X. Пусть теперь N оснащено и $\mathfrak{v}$ — оснащение. Пара $(N, \mathfrak{v})$ оснащенно бордантна нулю в M, если в $M \times [0, 1]$ существует такая пленка X, натянутая на $N \times 0$, что $\mathfrak{v}$ продолжается до оснащения $\mathfrak{u}$ этой пленки в $M \times [0, 1]$, т. е.

$$u^i(x, t) = (v^i(x), 0) \quad \text{при} \quad (x, t) \in N \times [0, \varepsilon).$$

— *Прим. ред.*

пространства $T(S^p)_{y'}$, *то оснащенное многообразие* $(f^{-1}(y'), f^*\mathfrak{v}')$ *оснащенно бордантно* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$.

Теорема B. *Два гладких отображения многообразия M в* S^p *гладко гомотопны тогда и только тогда, когда соответствующие многообразия Понтрягина оснащенно бордантны*[1]).

Теорема C. *Любое оснащенное компактное подмногообразие* $(N, \mathfrak{w})$ *коразмерности p в M является многообразием Понтрягина, соответствующим некоторому гладкому отображению* $f\colon M \to S^p$.

Таким образом, классы гомотопных отображений находятся во взаимно однозначном соответствии с классами оснащенных бордизмов подмногообразий.

Доказательство теоремы A очень похоже на рассуждения § 4 и 5. Оно будет основано на трех леммах.

Лемма 1. *Если* $\mathfrak{v}$ *и* $\mathfrak{v}'$ — *два разных положительно ориентированных базиса в точке y, то многообразие Понтрягина* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ *оснащенно бордантно многообразию* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v}')$.

Доказательство. Выберем гладкий путь, соединяющий $\mathfrak{v}$ с $\mathfrak{v}'$ в пространстве положительно ориентированных базисов пространства $T(S^p)_y$. Существование такого пути обеспечивается линейной связностью пространства положительно ориентированных базисов, которое можно отождествить с пространством $GL^+(p, R)$ матриц p-го порядка, имеющих

[1]) В частности, гладкое отображение $M^m \to S^p$ гладко гомотопно постоянному отображению (отображению, образ которого сводится к одной единственной точке) тогда и только тогда, когда соответствующее многообразие Понтрягина оснащенно бордантно нулю.

Отметим еще, что в теореме B вместо «гладкой гомотопии» можно говорить просто о «гомотопии», однако по-прежнему считая рассматриваемые отображения $M^m \to S^p$ гладкими (см. § 8, задача 4). Для непрерывных, но не гладких отображений $M^m \to S^p$ говорить о многообразии Понтрягина не приходится, однако из той же задачи видно, что их гомотопическая классификация сводится к гомотопической классификации гладких отображений. — *Прим. ред.*

положительный определитель [1]). Этот путь и дает требуемое оснащение пленки $f^{-1}(y)\times[0, 1]$.

Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы будем часто опускать указание на $f^*\mathfrak{v}$ и говорить просто об «оснащенном многообразии $f^{-1}(y)$».

Лемма 2. *Если y — регулярное значение для f, а z достаточно близко к y, то многообразие $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно многообразию $f^{-1}(y)$.*

Доказательство. Ввиду компактности множества $f(C)$ критических значений отображения f мы можем выбрать так $\varepsilon>0$, чтобы ε-окрестность точки y содержала бы только регулярные значения. Зафиксировав z, $\|z-y\|<\varepsilon$, выберем гладкое однопараметрическое семейство вращений (т. е. изотопию) r_t: $S^p\to S^p$ так, что $r_1(y)=z$ и

1) r_t — тождественное отображение при $0\leqslant t\leqslant$ $\leqslant\varepsilon'$;

2) r_t совпадает с r_1 при $1-\varepsilon'<t\leqslant 1$;

3) для всех t, $0\leqslant t\leqslant 1$, прообраз $r_t^{-1}(z)$ лежит на большой окружности, проходящей через y и z, и, следовательно, является регулярным значением отображения f. Определим гомотопию

$$F: M\times[0, 1]\to S^p$$

формулой $F(x, t)=r_t\circ f(x)$. Для каждого t точка z является регулярным значением композиции

$$r_t\circ f: M\to S^p.$$

Из этого следует, что z тем более является регулярным значением отображения F. Поэтому

$$F^{-1}(z)\subset M\times[0, 1]$$

— оснащенное многообразие; оно задает оснащенный бордизм между оснащенными многообразиями $f^{-1}(z)$ и $(r_1\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}\circ r_1^{-1}(z)=f^{-1}(y)$. Это доказывает лемму 2.

[1]) См. сноску на стр. 222. — *Прим. ред.*

Лемма 3. *Если f и g гладко гомотопны, а y является регулярным значением для них обоих, то $f^{-1}(y)$ оснащенно бордантно $g^{-1}(y)$.*

Доказательство. Выберем такую гомотопию F, что

$$F(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon,$$
$$F(x, t) = g(x) \quad \text{при} \quad 1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant 1.$$

Пусть z — такое близкое к y регулярное значение отображения F, что $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(z)$ оснащенно бордантно $g^{-1}(y)$. Тогда $F^{-1}(z)$ — оснащенное многообразие; оно задает оснащенный бордизм между $f^{-1}(z)$ и $g^{-1}(z)$. Это доказывает лемму 3.

Доказательство теоремы А. Для двух фиксированных регулярных значений y и z отображения f можно так выбрать вращения

$$r_t\colon S^p \to S^p,$$

что r_0 — тождественное отображение, а $r_1(z) = z$. Тогда отображение f гомотопно композиции $r_1 \circ f$; поэтому $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно оснащенному подмногообразию

$$(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ r_1^{-1}(z) = f^{-1}(y).$$

Доказательство теоремы А закончено.

Доказательство теоремы С будет основано на утверждении, относящемся к следующей ситуации. Пусть $N \subset M$ является оснащенным подмногообразием коразмерности p с оснащением $\mathfrak{v}$. Пусть N компактно и $\partial N = \partial M = \varnothing$.

Теорема об окрестности — прямом произведении. *Некоторая окрестность подмногообразия N в M диффеоморфна произведению $N \times R^p$, причем диффеоморфизм можно выбрать так, чтобы каждая точка $x \in N$ соответствовала точке $(x, 0) \in N \times R^p$, а любое наперед заданное нормальное оснащение $\mathfrak{v}(x)$ соответствовало стандартному базису в R^p.*

Замечание. Не каждое подмногообразие имеет окрестность, диффеоморфную произведению подмногообразия на евклидово пространство (см. рис. 17).

Доказательство. Сначала предположим, что M является евклидовым пространством R^{n+p}. Рассмотрим отображение g: $N \times R^p \to M$, определенное формулой

$$g(x;\, t_1, \ldots, t_p) = x + t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x).$$

Ясно, что дифференциал $dg_{(x,\, 0, \ldots,\, 0)}$ невырожден; поэтому g диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $(x, 0) \in N \times R^p$ на открытое множество.

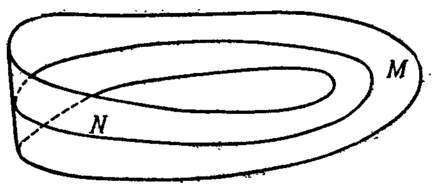


Рис. 17. Подмногообразие, не допускающее оснащения.

Мы докажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ отображение g взаимно однозначно на всей окрестности $N \times U_\varepsilon$ многообразия $N \times 0$; здесь U_ε обозначает ε-окрестность нуля в R^p. В противном случае в $N \times R^p$ существовали бы такие пары $(x, u) \neq (x', u')$ со сколь угодно малыми $\| u \|$ и $\| u' \|$, что

$$g(x, u) = g(x', u').$$

Ввиду компактности многообразия N мы могли бы выбрать такую последовательность подобных пар, что x сходятся, скажем, к x_0, x' — к x'_0, $u \to 0$ и $u' \to 0$. В этом случае ясно, что $x_0 = x'_0$, и мы получили бы противоречие с взаимной однозначностью отображения g в окрестности точки $(x_0, 0)$.

Следовательно g диффеоморфно отображает $N \times U_\varepsilon$ на некоторое открытое множество. Но U_ε

диффеоморфно всему евклидову пространству R^p посредством отображения

$$u \to \frac{u}{1 - \frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2}}.$$

Так как $g(x, 0) = x$ и $dg_{(x, 0)}$ обладает нужными свойствами, то теорема об окрестности — прямом произведении в частном случае $M = R^{n+p}$ доказана.

В общем случае прямые линии в R^{n+p} нужно заменить геодезическими линиями на M. Более точно, пусть $g(x, t_1, \ldots, t_p)$ — конец дуги геодезической линии на M длины $\| t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x) \|$, выходящей из точки x с начальным вектором скорости

$$\frac{t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x)}{\| t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x) \|}.$$

Читателю, знакомому с геодезическими, не составит труда проверить, что при достаточно малом ε отображение

$$g\colon N \times U_\varepsilon \to M$$

корректно определено, гладко и диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $(x, 0) \in N \times U_\varepsilon$ на некоторое открытое множество [1]). Конец доказательства проводится точно так же, как выше.

---

[1]) Читатель, недостаточно знакомый с геодезическими, возможно, найдет более простым следующий путь. Считая, что $N^n \subset M^m \subset R^k$, напомним, что Милнор рассматривает касательное пространство TM_x^m как m-мерное векторное пространство в R^k, проходящее через 0 (а не через x); параллельное ему линейное пространство, проходящее через x, обозначим на минуту через L_x.

Пусть $TM_x^\perp$ — векторное $(k - m)$-мерное пространство, ортогональное к TM_x и тоже проходящее через 0, и $L_x^\perp$ — параллельное ему линейное пространство, проходящее через x. Точки пространства L_x суть $x + y$, $y \in TM_x$, а точки $L_x^\perp$ суть $x + z$, $z \in TM_x^\perp$. Каждую точку $q \in M$ можно ортогонально спроектировать на L_x и $L_x^\perp$; пусть $x + y$ и $x + z$ — эти проекции. Тогда

Доказательство теоремы С. Пусть $N \subset M$ — компактное оснащенное подмногообразие без края. Возьмем, как это было сделано выше, представление некоторой окрестности V подмногообразия N в виде произведения

$$g\colon N \times R^p \to V \subset M$$

и определим проекцию

$$\pi\colon V \to R^p$$

формулой $\pi(g(x, y)) = y$ (см. рис. 18). Ясно, что 0 является регулярным значением, а $\pi^{-1}(0)$ в точности совпадает с N вместе с заданным на нем оснащением.

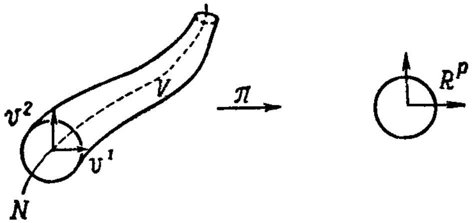


Рис. 18. Построение отображения с заданным многообразием Понтрягина.

Теперь возьмем какое-нибудь гладкое отображение $\varphi\colon R^p \to S^p$, которое переводит все точки x с $\|x\| \geqslant 1$ в одну «отмеченную» точку s_0, а открытый

некоторая окрестность W точки x на многообразии M описывается уравнением вида

$$z = f^x(y) \quad \left(z \in TM_x^\perp,\ y \in TM_x,\ \|y\| < \varepsilon\right),$$

где $f^x\colon TM_x \to TM_x^\perp$ — гладкая функция и $df_0^x = 0$.

Иными словами, каждая точка $q \in W$ имеет своей ортогональной проекцией на L_x некоторое $x + y$, где y мало, а на $L_x^\perp$ — $x + z$, где $z = f^x(y)$; такую точку q мы обозначим через $h^x(y)$. Тогда можно принять

$$g(x, t_1, \ldots, t_p) = h^x\left(t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x)\right).$$

— *Прим. ред.*

единичный шар диффеоморфно отображает[1]) на $S^p \setminus s_0$. Определим

$$f\colon M \to S^p,$$

положив

$$f(x) = \varphi(\pi(x)) \quad \text{при} \quad x \in V,$$
$$f(x) = s_0 \quad \text{при} \quad x \notin V.$$

Ясно, что F — гладкое отображение и $\varphi(0)$ является его регулярным значением. Так как соответствующее многообразие Понтрягина

$$f^{-1}(\varphi(0)) = \pi^{-1}(0)$$

в точности совпадает с оснащенным многообразием N, то доказательство теоремы C закончено.

Для доказательства теоремы B нам сначала необходимо показать, что многообразие Понтрягина любого отображения однозначно определяет его класс гомотопных отображений. Пусть f, g: $M \to S^p$ — гладкие отображения, а y является регулярным значением для них обоих.

Лемма 4. *Если оснащенное многообразие $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ совпадает с $(g^{-1}(y), g^*\mathfrak{v})$, то отображение f гладко гомотопно g.*

Доказательство. Обозначим $N = f^{-1}(y)$. Предположение $f^*\mathfrak{v} = g^*\mathfrak{v}$ означает, что $df_x = dg_x$ для всех $x \in N$.

Сначала предположим, что f в действительности совпадает с g на целой окрестности V многообразия N. Пусть h: $S^p \setminus y \to R^p$ — стереографическая проекция

---

[1]) Например, $\varphi(x) = h^{-1}(x/\lambda(\|x\|^2))$, где h — стереографическая проекция из точки s_0, λ — гладкая монотонно убывающая функция, причем $\lambda(t) > 0$ при $t < 1$ и $\lambda(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. (Считаем, что s_0 — северный полюс сферы S^p, а R^p параллельно $TS^p_{s_0}$. — *Ред.*)

из точки y. Тогда гомотопия

$$F(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in V,$$

$$F(x, t) = h^{-1}[t \cdot h(f(x)) + (1-t)\, h(g(x))] \text{ при } x \in M \setminus N$$

показывает, что f гладко гомотопно g.

Таким образом, нам достаточно так продеформировать f, чтобы оно в некоторой малой окрестности подмногообразия N совпало с g; при этом надо позаботиться о том, чтобы в процессе деформации никакие новые точки не отображались бы в y. Возьмем представление окрестности V многообразия N в виде прямого произведения $N \times R^p \to V \subset M$, и пусть V — настолько малая окрестность, что ни $f(V)$, ни $g(V)$ не содержат точки $\bar{y}$, центрально-симметричной точке y. Отождествляя V с $N \times R^p$ и $S^p \setminus \bar{y}$ с R^p, мы получаем из f, g отображения

$$F, G\colon N \times R^p \to R^p,$$

причем

$$F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = N \times 0$$

и

$$dF_{(x, 0)} = dG_{(x, 0)} = (\text{проекция на } R^p)$$

для всех $x \in N$.

Сначала мы найдем такую постоянную c, что

$$F(x, u) \cdot u > 0, \quad G(x, u) \cdot u > 0$$

при $x \in N$ и $0 < \| u \| < c$, т. е. точки $F(x, u)$ и $G(x, u)$ принадлежат одному и тому же открытому полупространству в R^p [1]). Поэтому гомотопия

$$- t)\, F(x, u) + tG(x, u),$$

соединяющая F с G, не переводит никаких новых точек в 0 — по крайней мере при $\| u \| < c$.

Согласно теореме Тейлора,

$$\| F(x, u) - u \| \leqslant c_1 \| u \|^2 \quad \text{при} \quad \| u \| \leqslant 1.$$

[1]) Именно з. используется, что $df_x = dg_x$ при всех $x \in N$. — *Прим. ред.*

Поэтому

$$|(F(x, u) - u) \cdot u| \leqslant c_1 \| u \|^3$$

и

$$F(x, u) \cdot u \geqslant \| u \|^2 - c_1 \| u \|^3 > 0$$

при $0 < \| u \| < \min(c_1^{-1}, 1)$; аналогичное неравенство справедливо и для G.

Чтобы образы удаленных от N точек не пришлось двигать при гомотопии, возьмем такую гладкую функцию λ: $R^p \to R$, что

$$\lambda(u) = 1 \quad \text{при} \quad \| u \| \leqslant c/2,$$

$$\lambda(u) = 0 \quad \text{при} \quad \| u \| \geqslant c.$$

Тогда гомотопия

$$F_t(x, u) = [1 - \lambda(u) t] F(x, u) + \lambda(u) t G(x, u)$$

соединяет отображение $F = F_0$ с отображением F_1, которое (1) совпадает с G в области $\| u \| < \frac{c}{2}$; (2) совпадает с F при $\| u \| \geqslant c$; (3) не имеет новых нулей. Тем самым получается требуемая деформация исходного отображения f, и лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы В. Если f и g гладко гомотопны, то, согласно лемме 3, многообразия Понтрягина $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(y)$ оснащенно бордантны. Обратно, если $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(y)$ оснащенно бордантны, а $(X, \mathfrak{w})$ — оснащенная пленка, реализующая этот бордизм, то с помощью рассуждений, полностью аналогичных доказательству теоремы С, строится гомотопия

$$F\colon M \times [0, 1] \to S^p,$$

для которой многообразие Понтрягина $(F^{-1}(y), F^*\mathfrak{w})$ в точности совпадает с $(X, \mathfrak{w})$. Положим $F_t(x) = F(x, t)$ и заметим, что F_0 и f имеют одно и то же многообразие Понтрягина. Поэтому $F_0 \sim f$, согласно лемме 4; аналогично $F_1 \sim g$. Отсюда $f \sim g$, и теорема В доказана.

Замечания. Теоремы А, В и С можно легко обобщить на тот случай. когда M — многообразие с краем. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать только те отображения, которые переводят край в отмеченную точку s_0. Гомотопические классы таких отображений

$$(M, \partial M) \to (S^p, s_0)$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с классами бордизмов оснащенных подмногообразий

$$N \subset \text{Внутренность } (M)$$

коразмерности p. Если $p \geqslant {}^1/_2 m + 1$, то в этом множестве гомотопических классов можно ввести структуру абелевой группы, которая называется p-й *когомотопической* группой $\pi^p(M, \partial M)$. Групповая операция в $\pi^p(M, \partial M)$ соответствует операции объединения непересекающихся оснащенных подмногообразий, лежащих во внутренности M (см. § 8, задача 17).

Теорема Хопфа

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Пусть M — связное ориентированное многообразие размерности $m = p$. Оснащенное подмногообразие коразмерности p — это просто конечное множество точек с выделенным базисом касательного пространства в каждой из них.

Пусть $\operatorname{sgn}(x)$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того, согласуется ли ориентация выделенного базиса с ориентацией M или нет. Тогда $\Sigma \operatorname{sgn}(x)$, очевидно, равна степени соответствующего отображения $M \to S^m$. С другой стороны, не трудно понять, что класс оснащенных бордизмов нульмерных многообразий однозначно определяется целым числом $\Sigma \operatorname{sgn}(x)$. Следовательно, мы доказали следующую теорему.

Теорема Хопфа. *Если M — компактное связное ориентированное m-мерное многообразие без края, то два отображения $M \to S^m$ гладко гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.*

С другой стороны, предположим, что M неориентируемо. Тогда, взяв какой-нибудь базис в TM_x, можно провести точку x по такому замкнутому пути в M, что этот базис непрерывно перейдет в базис, имеющий противоположную ориентацию[1]). В этом случае просто доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Если M — связное компактное неориентируемое m-мерное многообразие без края, то два отображения $M \to S^m$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень* mod 2.

Теория оснащенных бордизмов была разработана Понтрягиным для изучения гомотопических классов отображений $S^m \to S^p$ при $m > p$ (случай $m < p$ три-

---

[1]) Пусть $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — путь в многообразии M (т. е. точка $x(t) \in M$ непрерывно зависит от t). Пусть выбрана ориентация $\mathcal{O}_0$ касательного пространства $TM_{x(0)}$. Существует такой базис $\mathfrak{v}$ в $TM_{x(t)}$, который непрерывно зависит от t (т. е. состоит из непрерывно зависящих от t векторов) и при $t = 0$ ориентирован согласно $\mathcal{O}_0$. (Существование такого базиса $\mathfrak{v}(t)$ очевидно, если весь путь целиком лежит в одной координатной окрестности, т. е. $x([0, 1]) \subset g(U)$, где $g\colon U \to M$ — некоторая параметризация. В общем же случае можно разбить путь на участки, целиком лежащие в некоторых координатных окрестностях.) Базисов $\mathfrak{v}(t)$ с указанными свойствами существует много, но ориентация $\mathcal{O}_1$, которую $\mathfrak{v}(1)$ определяет в $TM_{x(1)}$, зависит только от исходной ориентации $\mathcal{O}_0$ и, может быть, еще от пути $x(t)$. (Если $\mathfrak{w}(t)$ — другой непрерывно зависящий от t базис в $TM_{x(t)}$, то при всех t переход от первого базиса ко второму описывается невырожденной матрицей m-го порядка, и если ее определитель положителен при $t = 0$, то он будет положителен и при $t = 1$.) Будем говорить, что ориентация $\mathcal{O}_1$ *получается при переносе* $\mathcal{O}_0$ *вдоль пути* $x(t)$.

Допустим теперь, что на M не существует замкнутого пути, *обращающего ориентацию*, т. е. такого пути $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0) = x(1)$, при переносе вдоль которого в $TM_{x(1)} = TM_{x(0)}$ получается ориентация, противоположная исходной. Зафиксировав какую-нибудь точку $x \in M$ и какую-нибудь ориентацию $\mathcal{O}_x$ пространства TM_x, определим для любой точки $y \in M$ ориентацию $\mathcal{O}_y$, как ту ориентацию, которая получается при переносе $\mathcal{O}_x$ вдоль какого-нибудь пути, соединяющего x с y. Если бы $\mathcal{O}_y$ зависела от выбора этого пути, то, идя из x в y по одному пути и возвращаясь из y в x по другому, мы получили бы путь, обращающий ориентацию. Легко видеть, что ориентации $\mathcal{O}_y$ согласованы в смысле, указанном в начале § 5. Итак, если на многообразии нет замкнутых путей, обращающих ориентацию, то оно ориентируемо (кстати, очевидно, что обратное тоже верно). — *Прим. ред.*

виален). Например, если $m = p + 1 \geqslant 4$, то существует ровно два гомотопических класса отображений $S^m \to S^p$. Понтрягин доказал этот результат, классифицируя одномерные оснащенные подмногообразия в S^m. Гораздо труднее оказалась эта задача при $m = p + 2 \geqslant 4$, но и в этом случае ему удалось, используя 2-мерные оснащенные многообразия, показать, что существуют ровно два гомотопических класса. Однако при $m - p > 2$ такой подход к этой задаче упирается в трудности с многообразиями большей размерности [1]). С тех пор выяснилось, что гомотопические классы отображений проще вычислять при помощи совсем других, более алгебраических методов [2]). Конструкция Понтрягина, однако, является обоюдоострым оружием. Она не только позволяет нам переводить информацию о многообразиях на язык гомотопической теории, но и, наоборот, позволяет переводить информацию о гомотопиях на язык теории многообразий. Некоторые наиболее глубокие работы по современной топологии возникли при взаимодействии этих двух теорий. Важным примером является работа Тома о бордизме ([40], [21])

§ 8. УПРАЖНЕНИЯ

В заключение читателю предлагается несколько задач.

Задача 1. Показать, что степень композиции $g \circ f$ равна произведению (степень g)$\cdot$(степень f).

Задача 2. Показать, что любой комплексный многочлен степени n задает гладкое отображение степени n сферы S^2 на себя.

Задача 3. Доказать, что если отображения f и g единичной сферы S^p удовлетворяют условию $\|f(x) - g(x)\| < 2$ при всех x, то f гомотопно g, и гомотопия гладкая, если f и g гладкие.

---

[1]) Этим методом удалось еще разобрать случай $m - p = 3$ (В. А. Рохлин [31*]). — *Прим. ред.*

[2]) См., например, Ху Сы-цзян [56] (или [36*], [49*]. — *Ред.*).

Задача 4. Доказать, что если X — компакт, то любое непрерывное отображение $X \to S^p$ можно равномерно приблизить гладким отображением, и если два гладких отображения $X \to S^p$ непрерывно гомотопны, то они гладко гомотопны.

Задача 5. Показать, что если $m < p$, то любое отображение $M^m \to S^p$ гомотопно отображению в точку.

Задача 6 (Брауэр). Показать, что любое отображение $S^n \to S^n$ степени, отличной от $(-1)^{n+1}$, имеет неподвижную точку.

Задача 7. Показать, что любое отображение $S^n \to S^n$ нечетной степени переводит некоторую пару центрально-симметричных точек в пару центрально-симметричных точек.

Задача 8. Пусть $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ — гладкие многообразия. Показать, что касательное пространство $T(M \times N)_{(x,\, y)}$ равно $TM_x \times TN_y$.

Задача 9. *Графиком* Γ гладкого отображения $f\colon M \to N$ называется множество таких точек $(x, y) \in M \times N$, что $y = f(x)$. Показать, что Γ есть гладкое многообразие и что касательное пространство

$$T\Gamma_{(x,\, y)} \subset TM_x \times TN_y$$

является графиком линейного отображения df_x.

Задача 10. Пусть дано гладкое многообразие $M \subset R^k$. Показать, что *касательное расслоение*

$$TM = \{(x, v) \in M \times R^k \mid v \in TM_x\}$$

также является гладким многообразием. Показать, что любое гладкое отображение $f\colon M \to N$ порождает гладкое отображение

$$df\colon TM \to TN,$$

причем (id — тождественное отображение)

$$d(\mathrm{id}) = \mathrm{id}, \qquad d(g \circ f) = (dg) \circ (df).$$

Задача 11. Аналогично показать, что *нормальное расслоение*

$$E = \{(x, v) \in M \times R^k \mid v \in TM_x^{\perp}\}$$

является гладким многообразием. Если M компактно и не имеет края, то отображение E в R^k

$$(x, v) \mapsto x + v$$

диффеоморфно отображает ε-окрестность многообразия $M \times 0$ в E на ε-окрестность N_ε многообразия M в R^k. (Сравните с теоремой об окрестности — прямом произведении в § 7.)

Задача 12. Определим $r: N_\varepsilon \to M$ с помощью формулы $r(x+v) = x$. Показать, что $r(x+v)$ ближе к $x+v$, чем любая другая точка многообразия M. Используя эту ретракцию r, доказать аналог утверждения из задачи 4, в котором сфера S^p заменена на многообразие M [1]).

Задача 13. Пусть многообразия M, $N \subset R^{k+1}$ не пересекаются друг с другом. Отображение зацепления

$$\lambda: M \times N \to S^k$$

определяется следующим образом:

$$\lambda(x, y) = (x - y)/\| x - y \|.$$

Если M и N компактны, ориентированы и без края, а сумма их размерностей $m + n = k$, то степень отображения называется *коэффициентом зацепления* $l(M, N)$. Доказать, что

$$l(N, M) = (-1)^{(m+1)(n+1)} l(M, N).$$

Доказать, что $l(M, N) = 0$, если M является краем ориентированного многообразия X, не пересекающегося

[1]) В этом аналоге задачи 4 вполне можно допустить наличие у M края. В этом случае, вместо того чтобы строить гладкую ретракцию $N \to M$ некоторой окрестности N многообразия M на само M (что, впрочем, можно сделать), проще поступить так. Некоторая окрестность U края ∂M в M диффеоморфна $\partial M \times I$ (почему?). Пусть $M' = M \setminus (\partial M \times [0, \varepsilon])$, где использовано представление U в виде $\partial M \times I$ и ε взято достаточно малым. Легко доказать, что M' является гладким ретрактом многообразия M, а M — гладким ретрактом некоторой окрестности N множества M' в объемлющем евклидовом пространстве. После этого любое непрерывное отображение компакта X в M можно сперва аппроксимировать отображением $X \to M'$, затем гладким отображением $X \to N$ и, наконец, гладким отображением $X \to M$. — *Прим. ред.*

с N. Дать определение коэффициента зацепления непересекающихся многообразий на сфере S^{m+n+1}.

Задача 14. Инвариант Хопфа. Если $y \neq z$ — регулярные значения отображения f: $S^{2p-1} \to S^p$, то многообразия $f^{-1}(y)$ и $f^{-1}(z)$ могут быть ориентированы как в § 5; следовательно, можно определить коэффициент зацепления $l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$.

a) Доказать, что коэффициент зацепления как функция y локально постоянен.

b) Доказать, что если y и z являются регулярными значениями также и для g, а $\|f(x) - g(x)\| < \|y - z\|$ для всех x, то

$$l(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) = l(g^{-1}(y), f^{-1}(z)) = l(g^{-1}(y), g^{-1}(z)).$$

c) Показать, что $l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ зависит только от гомотопического класса f и не зависит от выбора y и z.

Целое число $H(f) = l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ называется *инвариантом Хопфа* отображения f [55].

Задача 15. Доказать, что если размерность p нечетна, то $H(f) = 0$. Доказать, что для композиции

$$S^{2p-1} \xrightarrow{f} S^p \xrightarrow{g} S^p$$

$H(g \circ f)$ равно $H(f)$, умноженному на квадрат степени g.

Расслоение Хопфа π: $S^3 \to S^2$ определяется так:

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^{-1}((x_1 + ix_2)/(x_3 + ix_4)),$$

где h означает стереографическую проекцию сферы на плоскость комплексного переменного. Доказать, что $H(\pi) = 1$.

Задача 16. Говорят, что подмногообразия N и N' многообразия M *пересекаются трансверсально*[1]), если для любого $x \in N \cap N'$ подпространства TN_x и TN'_x порождают TM_x. (Если $n + n' < m$, то это означает, что $N \cap N' = \varnothing$.) Доказать, что если N — оснащенное подмногообразие, то его можно слегка поше-

[1]) Говорят также: *N и N' трансверсальны; N и N' находятся в общем положении.* — *Прим. ред.*

велить так, что пересечение с данным N' станет трансверсальным[1]). Доказать, что получившееся пресечение есть гладкое многообразие.

Задача 17. Пусть $\Pi^p(M)$ обозначает множество всех классов оснащенных бордизмов коразмерности p в многообразии M. Используя трансверсальные пересечения, определить отображение

$$\Pi^p(M)\times\Pi^q(M)\to\Pi^{p+q}(M).$$

При $p\geqslant\frac{1}{2}m+1$, используя операцию объединения непересекающихся оснащенных многообразий, превратить $\Pi^p(M)$ в абелеву группу (см. стр. 245).

Задача 18*. Пусть M, N — компактные гладкие многообразия одинаковой размерности и N связно, а f: $M\to N$ — непрерывное отображение. Докажите, что у всех гладких отображений g: $M\to N$, достаточно близко аппроксимирующих f (а такие g всегда существуют; см. задачу 12), степень отображения $\bmod 2$ одна и та же. Следовательно, этот вычет однозначно определяется исходным непрерывным отображением f. Его называют степенью отображения $f \bmod 2$. Если M и N ориентированы, то аналогично можно ввести степень любого непрерывного отображения f: $M\to N$.

Определенную таким путем степень (или степень $\bmod 2$) непрерывного отображения f, конечно, уже нельзя интерпретировать в таких наглядных терминах (с прообразами регулярного значения), как для гладких отображений. Докажите тем не менее, что основные свойства степени сохраняются: если N имеет край или если $f(M)\neq N$, то степень (или степень $\bmod 2$) равна нулю; у гомотопных отображений степени равны; верны аналоги задач 1, 6, 7. Пусть M и N — компактные гладкие ориентированные многообразия размерностей m и $m-1$ соответственно, причем M имеет край, состоящий из двух непересекающихся

[1]) Это верно и без предположения об оснащенности N, только при этом предположении доказательство получается проще. Еще один случай, когда доказательство упрощается, — это когда объемлющее многообразие M является евклидовым пространством. — *Прим. ред.*

многообразий N_1 и N_2; пусть f: $M \to N$ — непрерывное отображение. Покажите, что

$$\text{степень } f \mid N_1 = -\text{степень } f \mid N_2$$

(при обычной ориентации края). Если же M, N не ориентируемы, то во всяком случае выполняется соответствующее сравнение mod 2. Выведите отсюда, что край компактного гладкого многообразия не является его ретрактом (ранее было доказано, что он не является гладким ретрактом). Для непрерывного векторного поля с изолированными нулями определите понятие индекса поля в нуле и докажите аналоги основных результатов § 6.

Задача 19*. Пусть $M \subset R^k$ — компактное гладкое многообразие, E — его нормальное расслоение (задача 11),

$$E_1 = \{(x, v) \mid (x, v) \in E, \ \|v\| = 1\}.$$

Докажите, что E_1 — компактное гладкое $(k-1)$-мерное многообразие. Обозначая единичную сферу пространства R^k через R^{k-1}, для любого $e \in S^{k-1}$ рассмотрите касательное векторное поле

$$u_e(x) = \text{ортогональная проекция } e \text{ на } TM_x.$$

Докажите, что оно имеет нуль в точке x тогда и только тогда, когда e является образом точки $(x, v) \in E_1$ (с некоторым v) при отображении

$$\varphi\colon\ E_1 \to S^{k-1}, \quad \varphi(x, v) = v.$$

Когда этот нуль будет невырожденным? Докажите существование такого $e \in S^{k-1}$, что все нули поля $u_e(x)$ — невырожденные. Покажите, что для такого e все критические точки функции

$$f_e\colon\ M \to R, \qquad f_e(x) = e \cdot x,$$

будут невырожденными в смысле определения 4.5 из Уоллеса.

Задача 20*. В § 6 для компактного гладкого многообразия N без края доказано, что все касательные векторные поля на N с изолированными нулями (согласно предыдущей задаче, такие поля существуют) имеют одну и ту же сумму индексов нулей. Обозначим ее через $\chi(N)$. Доказано также, что $\chi(N) = 0$, если размерность N нечетна.

Пусть теперь $M \subset R^k$ есть m-мерное гладкое компактное многообразие с краем. Мы хотим изучить касательные векторные поля на M, имеющие следующие свойства:

(*) поле имеет конечное число нулей,
а на крае оно направлено наружу.

Для этого полезно ввести *дубль* $\tilde{M}$ многообразия M. Дубль — это m-мерное гладкое компактное многообразие без края, обладающее следующим свойством: существуют такие многообразия M_0, M_1 и такие диффеоморфизмы φ_0: $M_0 \to M$, φ_1: $M_1 \to M$, что

$$\tilde{M} = M_0 \cup M_1, \quad M_0 \cap M_1 = \partial M_0 = \partial M_1,$$
$$\varphi_0 | M_0 \cap M_1 = \varphi_1 | M_0 \cap M_1.$$

Наглядно можно представлять себе, что дубль получается склеиванием многообразия M с его точной копией; склеивание производится по краю ∂M, причем так, что каждая точка края отождествляется со своей копией на краю второго экземпляра. Если исходить из «абстрактного» определения многообразия, как у Уоллеса, и пользоваться общим результатом о склеивании двух многообразий по заданному диффеоморфизму краев (Уоллес, конец разд. 2.7), то предыдущая фраза дает не только наглядное разъяснение, но и исчерпывающее описание построения дубля. Если же ограничиваться подмногообразиями евклидова пространства и не апеллировать к недоказанному результату, то дубль легко построить в $R^{k+1} = R^k \times R$ (при этом $M \subset R^k \times 0$ будет «приподнято» и «изогнуто» для получения M_0, «опущено» и «изогнуто» для получения M_1). А именно:

Край ∂M имеет в M окрестность L, диффеоморфную $\partial M \times [0, 1]$; пусть f: $\partial M \times [0, 1] \to L$ — диффеоморфизм, причем $f(x, 0) = x$. Пусть φ: $R \to R$ — гладкая функция класса C^∞ со следующими свойствами:

$\varphi(t) \equiv t$ при $t \leqslant \frac{1}{3}$; $\varphi'(t) > 0$ при $t < \frac{2}{3}$; $\varphi(t) \equiv 1$ при $t \geqslant \frac{2}{3}$. Положим

$$f_1\colon \partial M \times [0, 1] \to R^{k+1} = R^k \times R;$$
$$f_1(x, t) = (f(x, 1 - \varphi(1 - t)), \varphi(t));$$
$$L_1 = f_1(\partial M \times [0, 1]); \quad M_1 = (M \times 1 \setminus L \times 1) \cup L_1.$$

Многообразие M_0 получается из M_1 отражением в гиперплоскости $R^k \times 0$; наконец, $\tilde{M} = M_0 \cup M_1$. (Рекомендуется проследить за построением, сделав рисунок для того случая, когда M — дуга на плоскости.)

Проверьте, что $\tilde{M}$ действительно является дублем. Докажите, что сколь угодно близко к орту $(0, \ldots, 0, 1)$ найдется такой вектор e, что (в обозначениях предыдущей задачи) векторное поле $u_e(x)$ на M_0 будет обладать свойствами (*). Рассматривая подходящие векторные поля на $\tilde{M}$, докажите, что для всех полей на M, удовлетворяющих (*), сумма индексов нулей $\Sigma\iota$ — одна и та же:

если m четно, то $2\Sigma\iota = \chi(\tilde{M})$;

если m нечетно, то $2\Sigma\iota - \chi(\partial M) = \chi(\tilde{M}) = 0$.

З а д а ч а 21*. Докажите теорему Хопфа, сформулированную на стр. 230, с помощью другой теоремы Хопфа, доказанной на стр. 245. А именно, постройте сперва векторное поле v с конечным числом нулей, затем докажите, что существует координатная окрестность, диффеоморфная шару, внутри которой содержатся все нули поля v, и сведите доказываемую теорему к такой: пусть на единичной сфере S^{n-1} в R^n задано векторное поле u (уже не касательное!), нигде не обращающееся в нуль, и пусть вращение u на S^{n-1} (см. стр. 219) равно нулю; тогда это поле можно продолжить до поля на единичном шаре, не имеющего нулей. Последнее утверждение докажите с помощью теоремы Хопфа об отображениях сферы в сферу.

З а д а ч а 22*. Пусть $M^m \subset R^{k+1}$ — гладкое компактное многообразие. Для любого единичного вектора e обозначим через R^k_e ортогональное ему

k-мерное линейное подпространство и через p_e — ортогональную проекцию на R^k_e. Посмотрим, когда ограничение $p_e|M$ будет вложением (см. стр. 65) многообразия M в R^k_e. Ранг $p_e|M$ будет всюду равен m, если e нигде не касается M. Две точки $x, y \in M$ не перейдут в одну, если соединяющий их вектор не параллелен e. Переформулируйте эти условия в терминах подходящих вспомогательных отображений

$$T_1 M \to S^k, \quad (M \times M) \setminus \Delta \to S^k,$$

где S^k — единичная сфера,

$$T_1 M = \{(x, v) \mid (x, v) \in TM, \ \| v \| = 1\}$$

(TM — касательное расслоение, см. задачу 10),

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$$

— «диагональ» в прямом произведении $M \times M$. Выведите отсюда, что существует вложение многообразия M^m в R^{2m+1} (теорема Уитни). Более того, если M компактно, то любое гладкое отображение f: $M^m \to R^{2m+1}$ можно путем малого возмущения превратить во вложение (если M — подмногообразие R^k, то рассмотрите вложение

$$g: \ M \to R^{2m+1} \times R^k, \qquad g(x) = (f(x), \varepsilon x),$$

и проекции $R^{2m+1} \times R^k \xrightarrow{p_k} R^{2m+1} \times R^{k-1} \xrightarrow{p_{k-1}} \ldots \to R^{2m+1} \times R \xrightarrow{p_1} R^{2m+1}$; ясно, что $p_1 \circ \ldots \circ p_k \circ g = f$; получите искомое вложение $M \to R^{2m+1}$, слегка изменяя p_i).

Докажите, что при $k \geqslant 2m + 3$ любые два вложения $N^m \to R^k$ гладко изотопны.

Задача 23*. В определении 6.5 у Уоллеса введено понятие бордантности двух гладких компактных многообразий без края (не путать с бордантностью подмногообразия в объемлющем многообразии, как это определено у Милнора!). Докажите, что это отношение эквивалентности.

Обозначим через $\mathfrak{N}_m$ совокупность классов бордизмов многообразий размерности m. Покажите, что $\mathfrak{N}_m$

можно рассматривать как совокупность классов бордизмов m-мерных многообразий в R^k или S^k, если $k > 2m + 2$, и что $\mathfrak{N}_m$ можно превратить в абелеву группу, называя суммой двух классов бордизмов, содержащих непересекающиеся многообразия M и N, класс бордизмов многообразия $M \cup N$. Вместо несвязного объединения можно воспользоваться связной суммой (см. Уоллес, стр. 155). Определите умножение $\mathfrak{N}_m \times \mathfrak{N}_n \to \mathfrak{N}_{m+n}$ с помощью прямого произведения многообразий и докажите, что по отношению к введенным операциям прямая сумма [1])

$$\mathfrak{N}_* = \sum \mathfrak{N}_m$$

является ассоциативным и коммутативным кольцом (оно называется *кольцом бордизмов*).

Для *ориентированных* многообразий M и N можно ввести другое отношение эквивалентности: M и N *бордантны* как ориентированные многообразия, если существует такое компактное гладкое ориентированное многообразие W с краем $M_1 \cup N_1$, что $M_1 \cup N_1 = \varnothing$, и существуют диффеоморфизмы $M \to M_1$ и $N \to N_1$, из которых один сохраняет, а другой изменяет ориентацию ($M_1 \cup N_1$ ориентируется как край W). Исходя из этого отношения эквивалентности, дайте определения *групп ориентированных бордизмов* Ω_m и *кольца ориентированных бордизмов* $\Omega_* = \Sigma\Omega_m$. (Чтобы подчеркнуть различие с этим случаем, об $\mathfrak{N}_m$ говорят, как о *группе неориентированных бордизмов.)*

Замечание. Кольца $\mathfrak{N}_*$ и Ω_* полностью известны ($\mathfrak{N}_*$ вычислил Том, вычисление же Ω_*, существенно продвинутое им, было доведено до конца усилиями ряда авторов).

Задача 24*. Определите эйлерову характеристику проективного пространства P^n (см. Уоллес, упражнения 2.6, 2.7), использовав стандартное отображение f: $S^n \to P^n$ и «подняв» с его помощью векторное поле с P^n на S^n (т. е. построив на S^n поле, f-связанное с

[1]) Напомним, что хотя имеется бесконечное число «слагаемых» $\mathfrak{N}_m$, каждый элемент $x \in \mathfrak{N}_*$ является конечной суммой $x_1 + \ldots + x_r$, $x_i \in \mathfrak{N}_{m_i}$.

заданным полем на P^n). Докажите, что при четном n P^n не ограничивает (см. задачу 20*; впрочем, это следует уже из неориентируемости, см. стр. 212).

Замечание. Использование эйлеровой характеристики в этой задаче — простейший пример применения для решения задач о бордизмах так называемых *характеристических классов* — некоторых «выделенных» элементов групп гомологий $H_i(M)$, определенным образом сопоставляемых каждому многообразию M.

Задача 25*. В § 7 у Уоллеса доказано, что каждая замкнутая поверхность (т. е. связное компактное гладкое двумерное многообразие без края) диффеоморфна одной из «стандартных» поверхностей Σ_k (сфера с k ручками) или $N(k)$ (сфера, в которую вклеены k листов Мёбиуса).

а) Вычислите эйлерову характеристику поверхностей Σ_k и $N(k)$ и убедитесь, в частности, что при различных k она получается различной. (Мы знаем, что эйлерова характеристика и ориентируемость сохраняются при диффеоморфизме[1]), поэтому отсюда получается полная классификация замкнутых поверхностей относительно диффеоморфизмов.)

б) В качестве инварианта, различающего Σ_k и $N(k)$ при разных k, Уоллес использует род поверхности, т. е. максимальное число непересекающихся гладких[2]) окружностей, при разрезе по которым поверхность остается связной. Хотя мы обошлись без рода, нелишне убедиться, что род замкнутой поверхности конечен — факт, принятый в § 7 у Уоллеса без доказательства. Пусть на поверхности M существует r непересекающихся гладких окружностей. Разрежем M по ним и заклеим кругами все полученные дырки

---

[1]) На самом деле они сохраняются и при гомеоморфизме. Это доказывается в алгебраической топологии.

[2]) Обычно в определении рода (определение 7.1 у Уоллеса) гладкости не требуют. Можно доказать, что в данном случае это несущественно. Но если мы интересуемся классификацией замкнутых поверхностей относительно диффеоморфизмов, то проще ничего не доказывать, а прямо включить требование гладкости в определение. Неважно, будет ли род в нашем смысле совпадать с обычным; важно, что он сохраняется при диффеоморфизмах.

(которых будет не менее r и не более $2r$). Обозначим эйлерову характеристику полученной замкнутой поверхности через χ'. Докажите, что $\chi' \geqslant \chi + r$ и $\chi' \leqslant 2$. Выведите отсюда, что род $M < \infty$.

в) Какие из замкнутых поверхностей ограничивают?

Задача 26*. Пусть $M^{n-1} \subset R^n$ — гладкое компактное подмногообразие без края, а S^{n-1} — единичная сфера $\| x \| = 1$. Для любой точки $p \in M^{n-1}$ определим *порядок* $\operatorname{mod} 2$ *точки p относительно* M^{n-1} как степень $\operatorname{mod} 2$ отображения

$$(*) \qquad M^{n-1} \to S^{n-1}, \quad x \to \frac{x-p}{\|x-p\|}.$$

Обозначим его через $\omega(p, M^{n-1})$. Возьмем на какой-нибудь гладкой дуге, трансверсально пересекающей M^{n-1} в точке p_0, две точки p_1 и p_2, близкие к p_0 и расположенные по разные стороны от нее. Докажите, что

$$\omega(p_1, M^{n-1}) \equiv \omega(p_2, M^{n-1}) \operatorname{mod} 2.$$

Выведите отсюда, что $R^n \setminus M^{n-1}$ несвязно. Рассматривая подходящую окрестность M^{n-1}, докажите, что $R^n \setminus M^{n-1}$ состоит ровно из двух компонент и что M^{n-1} совпадает с границей каждой из них. Докажите, наконец, что M^{n-1} ориентируемо и допускает оснащение в R^n.

(Теперь мы могли бы, ориентировав M^{n-1}, определить *порядок точки p относительно* M^{n-1} как степень отображения $(*)$. Очевидно, это коэффициент зацепления p и M^{n-1}. Разумеется, можно и в общем случае ввести коэффициент зацепления $\operatorname{mod} 2$; наш порядок $\operatorname{mod} 2$ — частный случай.)

Приложение

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Здесь мы докажем один результат, который использовался в этой книге.

Теорема. *Любое связное гладкое одномерное многообразие диффеоморфно либо окружности S^1, либо интервалу числовой оси R.*

(*Интервал* — это связное подмножество R, не сводящееся к одной точке. Он может быть конечным или бесконечным, замкнутым, открытым или полуоткрытым.)

Поскольку любой интервал диффеоморфен[1] либо $[0, 1]$, либо $(0, 1]$, либо $(0, 1)$, то существуют только четыре различных связных одномерных многообразия.

В доказательстве будет использовано понятие «длины дуги». Обозначим интервал буквой I.

Определение. Отображение f: $I \to M$ называется *параметризацией длиной дуги*, если f диффеоморфно отображает I на открытое подмножество[2] многообразия M и при каждом $s \in I$ длина «вектора скорости» $df_s(1) \in TM_{f(s)}$ равна единице.

Любая локальная параметризация $I' \to M$ путем простой замены переменной может быть переобразована в параметризацию длиной дуги.

Лемма. *Пусть f: $I \to M$ и g: $J \to M$ — две параметризации длиной дуги. Тогда $f(I) \cap g(J)$ имеет не более двух компонент связности. Если это пересечение состоит только из одной компоненты, то f можно продолжить до параметризации длиной дуги объединения $f(I) \cup g(J)$. Если имеются две компоненты, то M обязательно диффеоморфно S^1.*

Доказательство. Ясно, что $g^{-1} \circ f$ диффеоморфно отображает любое относительно открытое[3] подмножество интервала I на относительно открытое подмножество интервала J. Кроме того, производная функции $g^{-1} \circ f$ всюду равна $+1$ либо -1.

Рассмотрим график этой функции $\Gamma \subset I \times J$; он состоит из всех тех точек (s, t), что $f(s) = g(t)$. Тогда Γ — замкнутое подмножество в $I \times J$, состоящее из отрезков прямых наклона ± 1. Так как Γ

[1] Бесконечный интервал диффеоморфно отображается на единичный, например, при помощи отображения вида $f(t) = a \operatorname{th} t + b$.

[2] Следовательно, I может иметь граничные точки только в том случае, когда M имеет край.

[3] См. сноску на стр. 195. — *Прим. ред.*

замкнуто в $I \times J$ и $g^{-1} \circ f$ — локальный диффеоморфизм, то эти отрезки прямых не могут кончаться внутри $I \times J$, а должны достигать границы. Поскольку $g^{-1} \circ f$ взаимно однозначно, то на каждой из четырех сторон прямоугольника $I \times J$ может кончаться, самое большее, один такой отрезок.

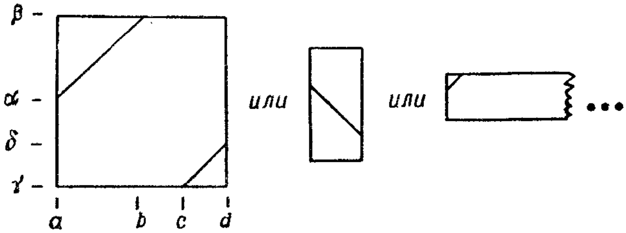


Рис. 19. Три из возможных вариантов для Г.

Следовательно, I состоит не более чем из двух компонент. (См. рис. 19.) Кроме того, если I состоит из двух компонент, то обе они должны иметь одинаковый наклон.

Если Г связно, то $g^{-1} \circ f$ продолжается до линейного отображения L: $R \to R$. Тогда комбинация f и $g \circ L$ дает требуемое продолжение

$$F: I \cup L^{-1}(J) \to f(I) \cup g(J).$$

Если Г имеет две компоненты с наклоном, скажем, $+1$, то оно должно быть устроено, как в левом прямоугольнике на рис. 19[1]). Преобразуя, если необходимо, интервал $J = (\gamma, \beta)$, мы можем считать, что $\gamma = c$ и $\delta = d$, так что

$$a < b \leqslant c < d \leqslant \alpha < \beta.$$

Полагая теперь $\theta = 2\pi t/(\alpha - a)$, мы задаем требуемый диффеоморфизм

$$h: S^1 \to M$$

[1]) В частности, в этом случае I и J должны быть конечными. — *Прим. ред.*

формулой

$$h(\cos\theta,\ \sin\theta)=\begin{cases} f(t) & \text{при} \quad a<t<d, \\ g(t) & \text{при} \quad c<t<\beta. \end{cases}$$

Образ $h(S^1)$, будучи одновременно компактным и открытым в M, должен совпадать со всем M. Это доказывает лемму.

Доказательство классификационной теоремы. Любую параметризацию длиной дуги можно продолжить до параметризации

$$f\colon I\to M,$$

максимальной в том смысле, что f уже нельзя продолжить ни на какой больший интервал как параметризацию длиной дуги: для этого нужно только продолжить f, насколько это возможно, влево[1]), а затем насколько возможно вправо.

Если многообразие M не диффеоморфно S^1, то мы докажем, что f — отображение «на» и, следовательно, диффеоморфизм. Если бы открытое множество $f(I)$ не совпадало со всем M, то у $f(I)$ имелась бы предельная точка x в $M\setminus f(I)$. Параметризовав длиной дуги окрестность точки x и применив лемму, мы получили бы, что f можно продолжить на больший интервал[2]). Это противоречит предположению о максимальности f и, следовательно, завершает доказательство.

[1]) Легко видеть, что если существуют продолжения f на отрезки I_α, у каждого из которых правый конец совпадает с правым концом I, то существует и продолжение на $\bigcup I_\alpha$. — *Прим. ред.*

[2]) Если бы пересечение указанной окрестности точки x с $f(I)$ не было связно, то по лемме многообразие M было бы диффеоморфно S^1. — *Прим. ред.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Список литературы к этой книге имеет смешанный характер; он содержит как оригинальные работы (и недавние, и такие, результаты которых давно стали классическими, а изложение сильно устарело), так и рекомендуемые учебники. Для ориентации читателя, который пожелает глубже ознакомиться с предметом, здесь собрано несколько замечаний о достижениях дифференциальной топологии и о литературе.

Прежде всего об основах предмета. Было бы весьма стеснительно ограничиваться тем минимумом, которого хватало в пределах этой книги[1]). «Ничьей земле» (выражение Ленга, уже использованное в предисловии редактора перевода) посвящены [17] и первые три главы из [38], тогда как [18] относится специально к основаниям дифференциальной топологии (аппроксимация и триангулируемость; в упражнениях затронуты и другие вопросы).

Теперь о некоторых результатах дифференциальной топологии. Основное понятие этого предмета — понятие гладкой структуры на многообразии. В случае такого пространства, как n-мерная сфера, мы

---

[1]) Так, касательные пространства и касательные расслоения здесь были определены лишь для подмногообразий евклидова пространства (касательные расслоения — только в задачах), а между тем для «абстрактных» многообразий (топологических пространств, снабженных гладкой структурой) также имеются соответствующие понятия. Преимущество абстрактной трактовки — в ее гибкости: многообразие часто строится именно как «абстрактное» многообразие (пример — действительное и комплексное проективные пространства, упражнения 2.7 и 2.9 из Уоллеса) и многие вопросы, где касательные пространства несомненно должны играть существенную роль, тоже никак не связаны с вложением в евклидово пространство. Касательное расслоение — частный случай более общего понятия векторного расслоения, важного не только для топологии, но и для дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений.

имеем, так сказать, в готовом виде локальные системы координат, согласованные друг с другом так, что переход от одной такой системы к другой происходит при помощи гладких функций. Но можно ли ввести системы координат на сфере другим способом, так, чтобы полученное многообразие было бы не диффеоморфно исходному? И может ли быть так, что пространство является топологическим многообразием (т. е. покрывается окрестностями, каждая из которых есть клетка), но не может быть превращено в гладкое многообразие? Недавно было доказано, что ответ на оба этих вопроса положительный. Собственно, выделение дифференциальной топологии в самостоятельную область математики естественно как раз и датировать открытием Милнором [20] существования различных гладких структур на семимерной сфере. Обзор Милнора [23] в основном посвящен популярному изложению вопроса о гладких структурах на сферах. Для его понимания, так же как и для чтения других топологических работ, цитируемых далее в основном тексте данного раздела, требуется знакомство с основными понятиями алгебраической топологии.

Мы познакомились с классификацией одномерных гладких многообразий (приложение к Милнору) и двумерных компактных гладких многообразий без края (§ 7 Уоллеса) [1]. Изучение трехмерных многообразий в значительной степени представляет собой предмет современных научных исследований (см. обзор Папакирьякопулоса [26], [27*]). Для компактных многообразий размерности $\geqslant 4$ проблема классификации в действительности неразрешима (см. Марков [19], а также Бун, Хакен и Поенару [9]). Однако достигнут большой прогресс для *односвязных* многообразий большой размерности.

---

[1] В связи с двумерными многообразиями Милнор ссылается на старую книгу Керекьярто [15], специально им посвященную. Вообще же классическая трактовка этого вопроса, упоминаемая Уоллесом в начале § 7, содержится в многих учебниках топологии (особенно старых — в новых не хватает места), а также в книгах по римановым поверхностям (где, правда, обычно ограничиваются ориентируемым случаем).

Важным результатом в этом направлении было доказательство *обобщенной гипотезы Пуанкаре* для размерностей $n \geqslant 5$: если компактное гладкое n-мерное многообразие M^n таково, что при всех $k < n$ любое отображение k-мерной сферы $S^k \to M^n$ гомотопно отображению в точку, то M^n гомеоморфно n-мерной сфере. Эта теорема была сперва доказана Смейлом [33], Столлингсом и Уоллесом [47] для $n \geqslant 7$, а затем Смейлом [34], Столлингсом и Зиманом — для $n \geqslant 5$. Подробное изложение этого результата и его обобщения — теоремы Смейла об h-бордизме — имеется у Милнора [24*], сводка результатов и первые применения — в обзоре Смейла [35]. Доказательства основаны на исследовании критических точек и сферических перестроек (важную роль играет описанное у Уоллеса в разделе 8.2 сокращение перестроек).

В формулировке обобщенной гипотезы Пуанкаре налагаются определенные условия на гомотопические свойства многообразия M^n и делается заключение, что классификация таких многообразий с точностью до гомеоморфизма тривиальна. (Теперь можно сказать, что теория Милнора гладких структур на сферах — это классификация таких многообразий с точностью до диффеоморфизма, т. е. до более тонкого отношения эквивалентности.) Сразу же стали предприниматься попытки более или менее непосредственного применения тех же методов для классификации многообразий с другими гомотопическими свойствами и кое-что удалось сделать [42], однако следующее существенное продвижение было достигнуто при комбинации этих методов с методом Понтрягина — Тома. Этот шаг (сопровождавшийся резким усложнением используемого аппарата алгебраической топологии) сделали Новиков и Браудер, которым удалось почти полностью осуществить редукцию классификации односвязных многообразий к задачам алгебраической топологии [1]). См. об этом в обзоре Уолла [43*].

[1]) Уоллес дает ссылку на изложение Уолла [44], содержащее некоторые усовершенствования. Теперь естественно сослаться на вышедшую недавно книгу Уолла [45*].

Неразрешимость проблемы классификации в общем неодносвязном случае еще не исключает возможности ее решения для многообразий с достаточно простой фундаментальной группой — например, циклической; и действительно, за последние годы в этом направлении достигнуто значительное продвижение[1]).

Одна из задач дифференциальной топологии относится к вложениям многообразий в евклидово пространство. Мы знаем, что n-мерное многообразие можно вложить в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство (задача 22*); нельзя ли вложить его в евклидово пространство меньшей размерности? Такой же вопрос можно ставить и для *погружений*, или *иммерсий*; так называются гладкие отображения ранга n (Уоллес, определение 2.11). См. об этом в обзоре Смейла [35].

В целом обзоры [23], [35], [43*] (последний охватывает более широкий круг вопросов, но написан более сжато), не требуя значительных предварительных сведений, дают хорошее представление о состоянии дифференциальной топологии к моменту их написания. С тех пор в ней были достигнуты весьма значительные дальнейшие успехи, но, насколько известно, им пока не посвящено обзоров такого же характера.

В заключение упомянем литературу по смежным областям математики.

Учебники по алгебраической топологии: [36*], [49*], [50], [56]. К сожалению, в учебниках еще не нашли отражения новые направления в алгебраической топологии (обобщенные теории гомологий), в известной мере потеснившие прежние, особенно в приложениях к дифференцальной топологии.

Эпизодические упоминания о расслоениях в этой книге не дают представления об их значении для топологии. По-видимому, лучшим введением в теорию расслоенных пространств остается первая половина книги Стинрода [39] (расслоения в ней называются «косыми произведениями»), хотя кое-что теперь стоило бы изложить иначе. (Вторая половина, начи-

[1]) См. [45*].

ная с § 20, теперь безнадежно устарела.) Представление об использовании расслоений и дифференциальных форм в геометрии дает [38]. Теория дифференциальных форм находится на грани между топологией, геометрией и анализом и по-разному используется в каждой из этих дисциплин. Элементарное введение — [37]. Изложение, ориентированное в сторону топологии — [30].

Понятие критической точки имеет важные приложения в дифференциальной геометрии [22], [14], [3*]. Полученные таким образом геометрические результаты в свою очередь полезны для топологии [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс (Ince E. L.), Ordinary differential equations, Dover, New York, 1953. (Русский перевод раннего издания: Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГОНТИ, Харьков, 1939.)
2. Аллендорфер (Allendoerfer C. B.), The Euler number of a Riemann manifold, *Amer. Jour. Math.*, **62** (1940), 243—248.
3*. Альбер С. И., Топология функциональных многообразий и вариационное исчисление в целом, *УМН*, **25** (1970), № 4, 57—122.
4. Апостол (Apostol T. M.), Mathematical Analysis Reading, Mass: Addison — Wesley, 1957.
5. Ауслендер, Мак-Кензи (Auslander L., MacKenzie R.), Introduction to differentiable manifolds, New York, McGraw-Hill, 1963.
6. Блекетт (Blackett D. W.). Elementary topology, Academic Press, New York, 1967.
7. Браун (Brown A. B.), Functional dependence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38** (1935), 379—394. (См. теорему 3-III.)
8. Брауэр (Brouwer L. E. J.), Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, **71** (1912), 97—115.
9*. Бун, Хакен, Поенару (Boone W. W., Haken W., Poenaru V.), On recursively insolvable problems in topology and their classification, Contributions to Mathematical Logic, 1966, 37—74.
10. Бурбаки (Bourbaki N.), Topologie générale, Hermann, Paris. (Русский перевод первых восьми глав: Общая топология. Основные структуры. М., «Наука», 1968; Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М., «Наука», 1969.)
11. Гофман (Goffman C.), Calculus of several variables, New York; Harper & Row, 1965.
12. Дубовицкий А. Я., О дифференцируемых отображениях n-мерного куба в k-мерный куб. *Мат. сб.* **32** (1953), № 2, 443—464.
13. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, М., «Мир», 1964.
14. Зейферт Г., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом. М., ИЛ, 1947.
15. Керекьярто (Kerêkjártó B. V.), Vorlesungen uber Topologie, Berlin, Springer, 1923.
16. Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., «Наука», т. 1, 1967; т. 2, 1970.

17. Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., «Мир», 1967.
18. Манкрс (Munkres J. R.), Elementary differential topology, Annals of Math. Studies, v. 54, Princeton Univ. Press, 1963.
19 Марков А. А, Неразрешимость проблемы гомеоморфизма, Proceedings Internat. Congress of Math., 1960, 300—306, Cambridge Univer. Press.
20. Милнор Дж., О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере. Сб. переводов «Математика», 1 : 3 (1957), 35—42.
21. Милнор (Milnor J.), A survey of cobordism theory. *L'Enseignement math.* 8, (1962), 16—23.
22. Милнор Дж., Теория Морса, М., «Мир», 1965.
23. Милнор Дж., Дифференциальная топология. УМН, 1964, т. 20, № 6, 41—54 (поправки: *УМН*, **21**, (1965), № 1, 237; № 5, 286).
24*. Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме. М., «Мир», 1969.
25. Морс А. (Morse A. P.), The behavior of a function on its critical set., *Ann. of Math.*, **40** (1939), 62—70.
26. Папакирьякопулос (Papakyriakopoulos C. D.), The theory of three-dimensional manifolds since 1950, Proc. Intern. Congress of Math., 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 433—440.
27*. Папакирьякопулос С. Д., Некоторые проблемы теории трехмерных многообразий, Сб. переводов «Математика», 4 : 1 (1960), 15—30.
28. Понтрягин Л. С., Классификация непрерывных отображений комплекса в сферу, *ДАН СССР*, **19** (1938), № 3, 147—149.
29. Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий, Труды МИАН, т. 45, М., Изд-во АН СССР, 1955.
30. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, М., ИЛ, 1956.
31*. Рохлин В. А., Классификация отображений $(n+3)$-мерной сферы в n-мерную. ДАН СССР, 1951, т. 81, № 1, 19—22.
32. Сард (Sard A.), The measure of the critical points of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 883—890.
33. Смейл (Smale S.), Generalized Poincare's conjecture in higher dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 373—375.
34. Смейл С., Обобщенная гипотеза Пуанкаре в размерностях, бóльших четырех, Сб. переводов «Математика», **6** : 3 (1962), 139—155.
35. Смейл С., Обзор некоторых недавних достижений в дифференциальной топологии, *УМН*, **19** (1964), № 1, 125—138.
36*. Спеньер Э., Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971.
37. Спивак М., Математический анализ на многообразиях, М., «Мир», 1968.
38. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, М., «Мир», 1970.
39. Стинрод Н., Топология косых произведений, М., ИЛ, 1953.
40. Том Р., Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых

многообразий, Сб. «Расслоенные пространства и их приложения», М., ИЛ, 1953, 293—351.

41. Уитни (Whitney H.), A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 514—517.
42. Уолл (Wall C. T. C.), Classification of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, *Ann. of Math.*, **75** (1962), 163—189.
43*. Уолл (Wall C. T. C.), Topology of smooth manifolds, *J. Lond. Math. Soc.*, **40** (1965), № 1, 1—20.
44. Уолл (Wall C. T. C.), Classifications problems in differentiable topology, *Topology*, **2** (1963), 253—281; **3** (1965), 291—304; **5** (1966), 73—94.
45*. Уолл (Wall C. T. C.), Surgery on compact manifolds, Academic Press, New York — London, 1971.
46. Уоллес (Wallace A. H.), Introduction to algebraic topology, Macmillan (Pergamon), New York, 1957.
47. Уоллес (Wallace A. H.), Modifications and cobounding manifolds, Pt. 1, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 503—528; Pt. 2, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 773—809; Pt. 3, *J. Math. Mech.*, **11** (1962), 979—990; Pt. 4, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), 445—484.
48. Фенхель (Fenchel W.), On total curvatures of Riemannian manifolds, *J. London. Math. Soc.*, **15** (1940), 15—22.
49*. Фукс Д., Фоменко А., Гутенмахер В., Гомотопическая топология, Изд-во МГУ, 1969.
50. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. М., «Мир», 1966.
51. Хирцебрух (Hirzebruch F.), Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Ergeb. Math., v. 9.
52. Хирш (Hirsch M.), A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 364—365.
53. Хопф (Hopf H.), Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **96** (1926), 209—221.
54. Хопф (Hopf H.), Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **96** (1926), 225—250.
55. Хопф (Hopf H.), Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, *Fund. Math.* **25** (1935), 427—440.
56. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, М., «Мир», 1964.
57. Чжень (Chern S. S.), A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannien manifolds, *Ann. Math.* **45** (1944), 747—752.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Теоретико-множественные обозначения

$x \in A$	x есть элемент множества A
$x \notin A$	x не является элементом множества A
$A \subset B$	множество A содержится в множестве B
$A \supset B$	множество A содержит множество B
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
$\bigcup A_i$	объединение множеств A_i
$\bigcap A_i$	пересечение множеств A_i
CA	дополнение к множеству A
$\varnothing$	пустое множество
$A \setminus B$	разность множеств A и B
$\# A$	число элементов множества A
$\{x \mid x$ обладает свойством $S\}$	совокупность всех тех x, которые обладают свойством S
id	тождественное отображение (какого именно мно-

	жества A, должно быть ясно из контекста; переводит каждую точку $a \in A$ снова в a).
$f\colon A \to B$	отображение множества в множество

К такому f относятся еще следующие обозначения:

$f \mid A_1$	ограничение отображения f на подмножестве $A_1 \subset A$
$f^{-1}(b) = \{a \mid f(a) = b\}$	(полный) прообраз точки $b \in B$
$f^{-1}(B_1) = \{a \mid f(a) \in B_1\}$	(полный) прообраз множества $B_1 \subset B$
$\operatorname{Im} f = f(A)$	образ множества A
$g \circ f$ или gf	композиция отображений f и $g\colon B \to C$, определяемая формулой $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(В зависимости от контекста gf (или $g \cdot f$) может обозначать и обычное произведение функций.)

Обозначения, которые вводятся в книге

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЖ. МИЛНОР. ТОПОЛОГИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

Дж. МИЛНОР, А. УОЛЛЕС

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Редактор *Г. М. Цукерман*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Т. А. Максимова*

Сдано в набор 9/II 1972 г.
Подписано к печати 17/XI 1972
Бумага № 3 $84 \times 108^1/_{32}$=4,38 бум. л. 14,70 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 13,14. Изд. № 1/6581
Цена 91 коп. Зак. 60

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли. Измайловский проспект, 29.